

Multigrid-based Simulation Code for Mantle Convection in Spherical Shell Using Yin-Yang Grid

Masanori Kameyama and Akira Kageyama,
The Earth Simulator Center (ESC), Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology (JAMSTEC), Yokohama, Japan

インヤン格子と多重格子法を用いた3次元球殻マントル対流シミュレーションコードの開発

亀山 真典*, 陰山 聡
海洋研究開発機構 (JAMSTEC)、地球シミュレータセンター (ESC)

* e-mail: kameyama@jamstec.go.jp, URL: http://www.es.jamstec.go.jp/esc/research/Solid/members/kameyama/



要旨

3次元球殻領域内でのマントル対流の大規模シミュレーションを実現するには、球ジオメトリの効果的な離散化、及びマントル対流の流れ場の求解に要する膨大な計算コストの低減、の2つが大きな課題である。各々の課題を克服するために我々はこれまでに (i) **インヤン格子** [1, 2, 3] (ii) **ACuTE法** [4, 5] という独自のシミュレーション技術を開発し、その有効性を示してきた。そして今回、これらの技術を融合させることによって、新たな3次元球殻マントル対流シミュレーションプログラムを構築した。小規模なモデルを用いて低レイリー数 (Ra) の定常熱対流シミュレーションを行い、過去のシミュレーション研究の結果と比較したところ、粘性率が一定の場合だけでなく温度に依存する場合でも精度のよい解が得られていることを確認した。今後はより大規模な計算を可能にするためのプログラムの最適化、及び高 Ra かつ粘性率の空間変化が強い場合の計算を行い、より現実的なマントル対流問題への適用可能性を広げていく。

数値シミュレーションモデル

内径 r_i と外径 r_o の比 $r_i/r_o = 0.55$ をもつ3次元球殻領域内での、高粘性 (i.e., Prandtl 数無限大) かつ非圧縮な Boussinesq 流体の熱対流を考える。

基礎方程式系 (無次元)

- 運動方程式 (速度場 \mathbf{v} と圧力場 p を解く)

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot [\eta(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla)] + Ra Te_r, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\text{ただし } Ra \equiv \frac{\rho_o \alpha \Delta T g (r_o - r_i)^3}{\eta_o \kappa_o} \text{ は Rayleigh 数}$$

- 熱輸送方程式 (温度場 T の時間変化を解く)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{v} T) + q$$

- 境界条件

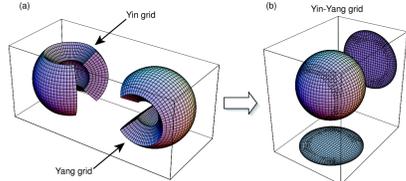
$$r = r_i, r_o \text{ で } \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta}{r} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\phi}{r} \right) = 0 \quad (\text{法線方向速度0かつ自由すべり面})$$

$$r = r_i \text{ で } T = 1, \quad r = r_o \text{ で } T = 0 \quad (\text{境界面での温度固定})$$

ただし無次元化には、長さスケール $d \equiv r_o - r_i$ (対流層の厚さ)、時間スケール d^2/κ 、圧力スケール $\eta_o \kappa_o / d^2$ 、温度スケール ΔT (対流を駆動する温度差) を用いた。

シミュレーションコードに用いた基盤技術

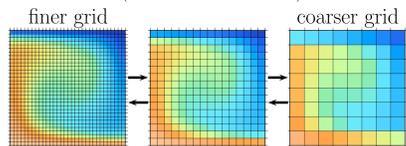
- インヤン格子: 球ジオメトリの効率的な空間離散化 [1, 2]



インヤン格子とは球面上のキメラ格子の一種であり、通常の球座標系 (r, θ, ϕ) における「極」の問題 (後述) を回避するために考案された。インヤン格子では二つの合同な要素格子を組み合わせて球面全体を覆う。ここで用いる要素格子とは、球座標格子における低緯度領域の一部 ($\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ かつ $-\frac{3}{4}\pi \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi$) を切り取ったものである。

要素格子に球座標系での極域 ($\sin \theta \simeq 0$) が含まれないことから、**インヤン格子には座標特異点がなく、格子間隔の極端な不均一さもない**。特に後者は、時間刻みを規定するクーラン条件の緩和を通して、大規模かつ高分解能な時間発展シミュレーションの効率化に大きく寄与する。加えてインヤン格子は直交系であるため計算速度が速く、ベクトル・並列計算に適していることも大きな利点である。ただし複数の要素格子を用いる代償として、要素格子間での境界値の設定が必要となる。しかしながらここで示したインヤン格子計算の結果によれば、水平 ($r = \text{一定}$) 面内での (双) 線型補間で十分なめらかな解が得られることが確認できる。

- 多重格子法 (マルチグリッド法): 楕円形偏微分方程式の高速度数値解法 [6, 7]



多重格子法は、楕円形偏微分方程式の境界値問題を解く上で理論的に最高速の方法として知られる。この方法はマントル対流問題以外にも広く適用が可能であり、多数の応用事例が存在する。また線型問題のみならず、非線型問題に対しても適用が可能である。

多重格子法計算では、解像度の異なる格子での計算を巧妙に組み合わせることにより、細かい格子系での解を高速に求める。この方法の特筆すべき利点は N 個の未知変数に対して $O(N)$ の計算量で解が求まることである。言い換えれば、多重格子法は大規模な問題で特にその威力を発揮する。ただしこの方法をそのまま適用した場合には、大規模並列実行時に演算効率低下してしまうという難点がある。しかしながら、格子レベルに応じて領域分割パターンを変更し、粗い格子系の計算で発生する通信のオーバーヘッドを回避することで性能の劣化をある程度抑制することができる [5, 7]。

- ACuTE法: マントル対流問題向けの緩和計算法 [4, 5]

ACuTE法とは擬似圧縮性法 [8] と局所時間刻み法との組み合わせにより、高粘性かつ非圧縮性の流体の定常流れ場を求めるものである。この方法はメモリ使用量が少ない、ベクトル化・並列化が極めて容易である、及び多重格子法との親和性が高い、といった優れた特徴を持っている。

マントル対流の流れ場を求める操作は、速度場 \mathbf{v} 及び圧力場 p に関する楕円形偏微分方程式

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot [\eta(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla)] + Ra Te_r$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

を解くことに帰着される。ただし簡単のため、温度 T 、粘性率 η の分布は既知とする。この方程式を直接解く代わりに、ACuTE法では \mathbf{v} と p に関する擬似的な時間発展方程式

$$M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \nabla \cdot [\eta(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla)] + Ra Te_r$$

$$-K \frac{\partial p}{\partial \tau} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

を定常になるまで時間積分してやることを考える。ここで M は擬似的な密度、 K は擬似的な圧縮率、 τ は擬似的な時間と考えることができる。

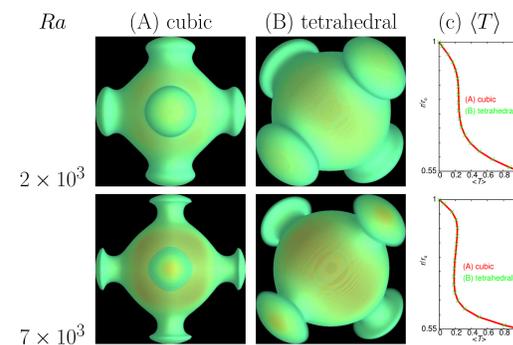
さらに粘性率 η の空間変化に起因する速度場 \mathbf{v} の「拡散速度」のばらつき、及び擬似的な「音波速度」のばらつきの悪影響を極力抑えるため、 $M \propto \eta$ かつ $K \propto \eta^{-1}$ ととってやる。この操作は擬似時間 τ の実効的な進み方を調整したことに相当し、これにより粘性率の空間変化がある場合の反復収束を加速することができる。

ただし実際には、非圧縮粘性流体の流れに内在する剛体運動成分 (並進3方向+回転3方向) と定数分の圧力の不定性を除去するような拘束条件を課した上でACuTE法の反復を実行する。またこれらの拘束条件は、インとヤンの補間の際に混入する誤差の影響を除去する上でも重要な役割を果たしている。

計算結果の一例

低 Ra 条件下で存在する、四面体あるいは六面体対称性をもつ定常熱対流を考える。計算結果の妥当性を検証するため、Iwase [9] との比較を行う。Iwase [9] では、単一の球座標系による空間離散化が採用されており、動径方向 ($r_i \leq r \leq r_o$) のメッシュ分割数 $N_r = 32$ 、緯度 ($0 \leq \theta \leq \pi$) 方向の分割数 $N_\theta = 32$ 、経度 ($-\pi \leq \phi \leq \pi$) 方向の分割数 $N_\phi = 64$ で計算されている。

低 Ra 一様粘性の定常熱対流



$Ra = 2 \times 10^3$ (上)、 $Ra = 7 \times 10^3$ (下) での定常熱対流で得られた温度場。(A)、(B) は無次元温度 $T > 0.4$ の領域のボリュームレンダリング表示、(C) は各深さでの水平平均温度 $\langle T \rangle$ を示す。

pattern	Ra	Iwase (1996)		this study			
		$32 \times 32 \times 64$	$16 \times 80 \times 160$	$64 \times 128 \times 256$	T_{av}	Nu	T_{av}
C	2×10^3	0.260	2.22	0.259	2.23	0.259	2.25
C	3.5×10^3	0.243	2.80	0.239	2.82	0.237	2.84
C	5×10^3	0.236	3.17	0.229	3.19	0.226	3.23
C	7×10^3	0.232	3.54	0.222	3.56	0.218	3.60
C	1×10^4	0.230	3.96	0.217	3.97	0.211	4.03
C	2×10^4	0.230	4.88	0.212	4.87	0.200	4.96
T	2×10^3	0.258	2.18	0.257	2.18	0.257	2.20
T	7×10^3	0.227	3.45	0.221	3.45	0.217	3.49

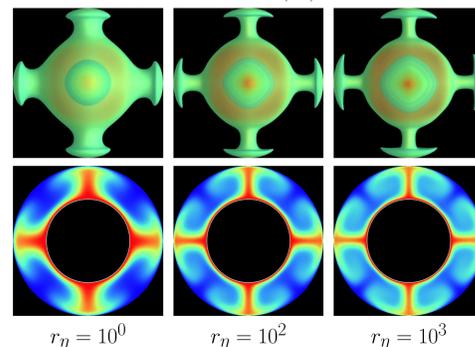
様々な流れパターン及び Ra で得られた、対流層内部の平均温度 T_{av} 及び Nusselt 数 Nu 。本研究での計算値と Iwase [9] で得られた値との比較。流れパターン "C" は六面体対称性、"T" は四面体対称性の場合を示す。

註: 本研究での水平面内メッシュ分割数は、格子間隔に基づいて通常の球座標に換算したものを示している。具体的には、インヤン格子での緯度方向 ($\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$) の分割数 N'_θ 、経度方向 ($-\frac{3}{4}\pi \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi$) の分割数 N'_ϕ に対して、 $\frac{N'_\theta}{N_\theta} = \frac{2}{3}$ 、 $\frac{N'_\phi}{N_\phi} = \frac{2}{3}$ により求まる N_θ, N_ϕ を示す。

粘性率の温度依存性がある場合の定常熱対流

粘性率 η は温度 T に応じて $\eta = \eta_o \exp[-\ln(r_\eta)T]$ と変化する。この際、外側境界面 ($T = 0$) での粘性率 η_o で定義した Rayleigh 数 $Ra_o = 5 \times 10^3$ は固定してある。

無次元温度 $T > 0.4$ の領域 (上)、温度分布の子午面断面 (下)



様々な粘性率コントラスト r_η で得られた T_{av} 及び Nu の比較。 Nu_{top} と Nu_{bot} はそれぞれ外側及び内側境界面での熱流量に基づいて求めたもので、熱平衡状態であれば両者は等しい。

r_η	Iwase (1996)		this study			
	$32 \times 32 \times 64$	$32 \times 96 \times 192$	$64 \times 128 \times 256$	T_{av}	Nu_{top}	Nu_{bot}
10^0	0.236	3.17	0.227	3.22	0.226	3.23
10^2	0.275	5.42	0.241	5.41	0.237	5.48
10^3	0.322	6.67	0.261	6.57	0.274	7.04

まとめ

インヤン格子+多重格子法による3次元球殻マントル対流コードの開発

- 根幹部分の開発はほぼ完了
 - 小規模な問題・ベンチマークテストの結果は良好
 - 熱対流計算に関する基本部分のベクトル化・並列化まで済
- 多重格子法ベースの3次元球殻マントル対流シミュレーションコード (国産コードでは唯一)
 - 非多重格子法コードより高速な計算が可能
 - 大規模計算ではその差はより歴然となるはず

今後はより現実的な条件下 (高 Ra 、強い粘性率変化) での適用可能性を検証し、マントルダイナミクス諸問題の理解へつなげたい。

謝辞 本研究のコード開発及びシミュレーションの一部は独立行政法人海洋研究開発機構の支援により、地球シミュレータを利用して行った。3次元ボリュームレンダリング可視化画像の作成には地球シミュレータセンター高度計算表現法グループの大野暢亮博士より多大なる協力を受けた。本研究は科研費特定領域研究「スタグナントスラブ」及び基盤研究(C)「世界最高速の3次元マントル対流シミュレーションプログラムの開発」より援助を受けた。

参考文献

- A. Kageyama and T. Sato. "Yin-Yang grid": an overset grid in spherical geometry. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 5, Q09005, doi:10.1029/2004GC000734, 2004.
- A. Kageyama. Dissection of a sphere and Yin-Yang grid. *J. Earth Simulator*, 3, 20–28, 2005.
- M. Yoshida and A. Kageyama. Application of the Yin-Yang grid to a thermal convection of a Boussinesq fluid with infinite Prandtl number in a three-dimensional spherical shell. *Geophys. Res. Lett.*, 31, L12609, doi:10.1029/2004GL019970, 2004.
- M. Kameyama, A. Kageyama, and T. Sato. Multigrid iterative algorithm using pseudo-compressibility for three-dimensional mantle convection with strongly variable viscosity. *J. Comput. Phys.*, 206, 162–181, 2005.
- M. Kameyama. ACuTEMan: A multigrid-based mantle convection simulation code and its optimization to the Earth Simulator. *J. Earth Simulator*, 4, 2–10, 2005.
- A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Math. Computation*, 31, 333–390, 1977.
- U. Trottenberg, C. Oosterlee, and A. Schüller. *Multigrid*. Academic Press, 2001. 631 pp.
- A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Phys.*, 2, 12–26, 1967.
- Y. Iwase. Three-dimensional infinite Prandtl number convection in a spherical shell with temperature-dependent viscosity. *J. Geomag. Geoelect.*, 48, 1499–1514, 1996.