

マントル対流数値シミュレーション概論

亀山 真典

平成 29 年 3 月 6 日

目次

1	マントル対流を記述する方程式の導出	2
1.1	基礎方程式	2
1.1.1	質量保存則	2
1.1.2	運動量の保存則	3
1.1.3	構成方程式と Navier-Stokes 方程式	3
1.1.4	状態方程式	4
1.1.5	熱エネルギーの保存則	4
1.2	マントル対流向けの近似	5
1.2.1	てっとり早く知りたい方のための基礎方程式のまとめ	10
1.3	マントル対流の基本場の設定	12
1.3.1	Boussinesq 近似の場合	12
1.3.2	非 Boussinesq 近似の場合	13
1.4	相転移の取り扱い	14
2	マントル対流の解析的研究	19
2.1	対流の起こり始めに関する線型安定性解析	19
2.1.1	上下の境界面がいずれも自由すべり面の場合	21
2.1.2	上下の境界面がいずれも固着面の場合	22
2.1.3	上下の境界面の一方が自由すべり面、もう一方が固着面のとき	24
2.1.4	まとめ	24
A	マントル対流に必要な熱力学	24
A.1	熱力学の基礎の復習	24
A.1.1	熱力学の第 1 法則	24
A.1.2	熱力学の第 2 法則	24
A.1.3	熱力学関数	24
A.1.4	熱力学関数の 1 次偏微分係数	26
A.1.5	相反定理 (Maxwell の関係式)	26
A.1.6	独立変数の取り換え	26
A.1.7	熱力学的な諸量の定義	27
A.2	熱エネルギー保存則への適用	28
A.3	相転移の熱力学	29
A.3.1	1 成分系の相転移の熱力学	29

B	非デカルト座標系でのマントル対流の基礎方程式系	30
B.1	一般座標系でのマントル対流の方程式系	30
B.2	(正規)直交曲線座標系でのマントル対流の方程式系	32
B.2.1	てっとり早く知りたい方のためのまとめ	33
C	高温高压下での物質の弾性的・熱的性質	36
C.1	Birch-Murnaghan の状態方程式	36
C.2	Mie-Grüneisen の状態方程式	37
C.3	格子の熱振動に関する Debye モデル	39
D	知っておくと便利な関数	40
D.1	誤差関数	40
D.2	球面調和関数	42
D.2.1	水平 Laplacian への分離	45
D.2.2	トロイダル場とポロイダル場	45
E	重力・ジオイド	45
E.1	球対称な密度分布をもつ物体による万有引力	46
E.2	扁平な物体による万有引力	47
E.3	自転による遠心力	50
E.4	重力	50
E.5	引力のポテンシャル	50
E.6	重力ポテンシャル・ジオイド	51
F	結晶の対称性と異方性	51
F.1	ミラー指数	52
F.2	極点図	52

1 マントル対流を記述する方程式の導出

まず、3次元デカルト座標系内での流体の運動を記述する一般的な方程式の形を示す。その後、マントル対流の性質を利用して方程式を簡単化する。

なお、この章の記述は [6, 13] を参考にした。

1.1 基礎方程式

流体の運動を記述する基本的な方程式は、質量、運動量、エネルギーの保存則である。これに加え、状態方程式、及び輸送係数 (熱伝導率や粘性率) を規定する方程式を含めて、閉じた基礎方程式系を構成する。

1.1.1 質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (1.1)$$

ここで、 ρ は流体の密度、 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ は流体の速度である。

よく知られている Lagrange 微分 (または実体微分)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を使って式 (1.1) を書き直すと

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

を得る。この式の左辺第 1 項は、ある一定の質量を持つ流体素片が占める体積の変化を表している。特に非圧縮 (ρ が一定) の場合にはさらに

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

と簡略化される。

1.1.2 運動量の保存則

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1.4)$$

この式の左辺は単位体積の流体素片の質量 (ρ) と加速度の積、即ち流体素片の持つ運動量の時間変化を表す。

右辺第 1 項と第 2 項は流体素片にはたらく表面力 (面を通してはたらく力) を表す。このうち、第 1 項は流体の圧力 p による等方的な応力、第 2 項は偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor) τ_{ij} で表される非等方的な応力である。流体素片にはたらくトルクのつりあいを考えると、偏差応力テンソルは対称テンソル

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (1.5)$$

であることがわかる。

右辺第 3 項は流体素片にはたらく体積力を表す。ここでは体積力は重力のみを考え、その他の力 (電磁気的な力やコリオリ力など) は考えない。後に示すように、マントル対流のような遅い流れでは、コリオリ力の影響は無視できる。

1.1.3 構成方程式と Navier-Stokes 方程式

物体の力学的応答、例えば作用する応力と変形速度を結びつける式を構成方程式 (constitutive equation) という。運動量の保存則 (1.4) に構成方程式を加えることで、流体の速度に関する閉じた方程式を構成することができる。

流体中の速度場から速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) L_{ij} を

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

のように定義する。これを用いて 2 つのテンソル E と W を

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{or} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad \text{or} \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

のように定義する。 W は回転速度テンソルと呼ばれ、剛体的な回転を表わしている。一方、 E は歪速度テンソル (strain rate tensor) と呼ばれ、非剛体的な変形を表わす。この両者のうち、 W は (剛体回転を表わしているから) 流体中の偏差応力には寄与しない。

多くの流体では、歪速度テンソル e_{ij} と偏差応力テンソル τ_{ij} の間には線型な関係がある。このような流体を Newton 流体と呼ぶ。さらに流体が等方的であるとすれば、 e_{ij} と τ_{ij} は

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} \quad (1.7)$$

なる関係式で結ばれる。ここで δ_{ij} は Kronecker の δ であり、 μ は粘性率、 λ は第 2 粘性率と呼ばれる。また偏差応力テンソル τ_{ij} の対角和 (trace) をとり、空間の 3 方向に平均すると、

$$\frac{\tau_{ii}}{3} = e_{ii} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \quad (1.8)$$

となるが、ここで現れる $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ を体積粘性率 (bulk viscosity) k_B と呼び、 k_B と書く。体積粘性率 k_B は流体の体積変化に伴う粘性応力の目安である。多くの流体では k_B は非常に小さいことが知られているので、 $k_B = 0$ とする (Stokes 近似)。これより、Newton 流体かつ Stokes 流体の場合には、偏差応力テンソルの成分は

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu e_{kk}\delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right) \quad (1.9)$$

となる。

式 (1.9) を式 (1.4) に代入すると、よく知られた Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right) \right] + \rho g_i \quad (1.10)$$

を得る。特に非圧縮を仮定すると、式 (1.10) は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_i \quad (1.11)$$

と簡単化される。さらに (マントル対流らしくはなくなるが) 粘性率 μ が一定であるとする

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i \quad (1.12)$$

と表わされる。

1.1.4 状態方程式

熱力学的考察によれば、物質の状態は 2 つの状態変数 (温度 T 、圧力 p など) により定められる。即ち、状態方程式は一般的には 3 つの変数を含んだ式、例えば

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (1.13)$$

のように表わされる。

状態方程式を具体的に指定する際には、熱膨張率 α や等温圧縮率 χ_T を用いるのが便利である。これらは以下のように定義される。

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.14)$$

$$\chi_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (1.15)$$

ここで、 $V = 1/\rho$ は比体積である。上式で () の右下つきの添字は、その変数を一定に保ったままの微分を表わす。

1.1.5 熱エネルギーの保存則

マントル対流で考慮すべきエネルギーには、熱エネルギーと運動エネルギーの 2 種類があるが、ここでは熱エネルギーの保存則のみを考える。運動エネルギーの保存則は運動量の保存則から導かれるものなので、ここでは考えない。

熱力学の第2法則より、熱エネルギーの保存則は

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho H \quad (1.16)$$

と表わされる。ここで、 T は温度、 s は比エントロピー（単位質量あたりのエントロピー）、 H は単位質量あたりの内部加熱率である。右辺第1項は粘性散逸による発熱で、

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1.17)$$

と書ける。また右辺第2項は伝導による熱輸送であり、熱流量 q は Fourier の法則から

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.18)$$

と表わされる。ここで k は熱伝導率である。

粘性散逸 Φ をあらわに書くと、

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(k_B - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= k_B \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

ここで右辺第1項は体積変化に起因する項、第2項は剪断変形（体積変化を伴わない）に起因する項を表わす。さらに Stokes 近似 ($k_B = 0$) かつ非圧縮性を仮定すれば、式 (1.19) は

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.20)$$

と簡単化される。

式 (1.16) の左辺を具体的にどう書き表わすかによって、熱エネルギーの保存則はさまざまな形で書き表わすことができる。導出の詳細は補遺 A を参照のこと。例えば、温度 T と圧力 p を独立変数として選ぶと、

$$ds = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp \quad (1.21)$$

となる。ここで、 C_p は定圧比熱である。これを式 (1.16) に代入すれば

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi + \rho H \quad (1.22)$$

を得る。

1.2 マントル対流向けの近似

以下では、マントル内の熱対流を考える場合に有効な近似を導入し、前章で導出した基礎方程式を簡略化する。

まず、状態方程式 (1.13) の簡単化を考える。マントル物質の相転移や組成の違いによる密度変化を無視すれば、マントルの密度 ρ は第一義的には温度 T と圧力 p の関数で与えられる。

$$\rho = \rho(T, p)$$

密度変化は主に静水圧下の圧縮によるものが多い（マントルの上面と下面で約 65%程度）ことが知られている。これより、式を簡単にするため、 $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ 、 $T = \bar{T} + T'$ 、 $p = \bar{p} + p'$ の如く、基本場（ $\bar{\quad}$ つき）と基本場からのずれ（ \prime つき）の2つに分ける。

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' = \rho(\bar{T} + T', \bar{p} + p') \\ &\simeq \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' \\ &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) + \bar{\rho} \bar{\chi}_T p' - \bar{\alpha} \bar{\rho} T' \end{aligned} \quad (1.23)$$

その際、定常かつ運動のない状態を基本場として採用するのが便利である。さらに簡単のため、基本場の空間変化は重力の方向にのみ起こると仮定する。この仮定から、圧力の基本場が満たすべき式は

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho} \bar{g}_i \quad (1.24)$$

で与えられる。

以降は、式 (1.23) を基にして、基礎方程式を簡略化していく。その際、方程式のスケールリングを行ない、各項の大きさを見積っていくのが便利である。表 1 及び 2 にスケールリングに用いる諸量をまとめておく。

表 1: スケールリングに用いる基準量

記号	意味	値の目安
ρ_r	対流している状態での特徴的な密度	$4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
ΔT_r	対流を駆動する特徴的な温度差	10^3 K
χ_{Tr}	等温圧縮率 χ_T の基準値	$3 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$
α_r	熱膨張率 α の基準値	$3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
μ_r	粘性率 μ の基準値	10^{21} Pa s
k_r	熱伝導率 k の基準値	$4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
C_{p_r}	定圧比熱 C_p の基準値	$10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
b	対流層の厚さ	$3 \times 10^6 \text{ m}$

表 2: 基礎方程式の無次元化に用いるスケール

量	スケール	値の目安
長さ	b	$3 \times 10^6 \text{ m}$
時間	$b^2 \rho_r C_{p_r} / k_r$	$9 \times 10^{18} \text{ s}$
速度	$k_r / b \rho_r C_{p_r}$	$3.3 \times 10^{-13} \text{ m s}^{-1}$
圧力	$\mu_r k_r / b^2 \rho_r C_{p_r}$	$1.1 \times 10^2 \text{ Pa}$

以下では、無次元化された量を * で表記する。

線型化された状態方程式 (1.23) をスケールリングすると、

$$\begin{aligned} \frac{\rho^*}{\bar{\rho}^*} &= 1 + \bar{\chi}_T p^* \frac{k_r \mu_r \chi_{Tr}}{\rho_r C_{p_r} b^2} - \bar{\alpha}^* T^* \alpha_r \Delta T_r \\ &= 1 + \bar{\chi}_T p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T^* \epsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

ここで新たに 3 つの無次元量を定義した。

$$M^2 \equiv \frac{k_r^2 \chi_{Tr}}{\rho_r C_{p_r}^2 b^2}, \quad Pr \equiv \frac{\mu_r C_{p_r}}{k_r}, \quad \epsilon \equiv \alpha_r \Delta T_r \quad (1.26)$$

M は Mach 数 (系の特徴的な速度と音速の比)、 Pr は Prantdl 数 (運動量の拡散率と熱拡散率の比) であり、 ϵ は熱的な浮力の目安を表わす。表 1 の値を用いると、これらの無次元量は $M^2 \sim 10^{-33}$ 、 $Pr \sim 2.5 \times 10^{23}$ 、 $\epsilon \sim 3 \times 10^{-2}$ と推定できる。これより、式 (1.25) 内で $M^2 Pr$ や ϵ を含む項を無視してもよいことが理解できる。 $M^2 Pr \rightarrow 0$ かつ $\epsilon \rightarrow 0$ とおく近似を非弾性近似 (anelastic approximation) という。

次に質量保存則 (1.1) をスケールリングする。スケールリングされた状態方程式 (1.25) を代入して整理すると、

$$\bar{\rho}^* \left(\bar{\chi}^* M^2 Pr \frac{\partial p^*}{\partial t^*} - \bar{\alpha}^* \epsilon \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} [\bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T^* \epsilon) v_i^*] = 0 \quad (1.27)$$

式 (1.27) に非弾性近似を適用すると

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{\rho}^* v_i^*) = 0 \quad (1.28)$$

を得る。この式は ρ^* の時間変化を無視したことになっており、これにより基礎方程式から弾性波を除去することができる。実際、マントル内の弾性波 (要するに地震波) は数 km/秒で伝播する現象であり、マントル対流が対象とする時間スケール (数百万年以上) では当然除去すべきものである。さらに、 $\bar{\rho}^*$ の空間変化が無視できる (Boussinesq 近似) と仮定すれば、式 (1.28) は

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1.29)$$

となり、非圧縮性流体の条件と一致する。

ここで、Boussinesq 近似の意味を考えてみる。断熱的な場合における $\bar{\rho}$ の空間変化は

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \bar{\rho} \bar{\chi}_a \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)$$

ここで χ_a は断熱圧縮率である。圧力の空間変化が静水圧的であると仮定すると、

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} = \bar{\rho} \bar{\chi}_a \bar{\rho} \bar{g}_i = \bar{\rho}^2 \bar{\chi}_a \bar{g}_i \quad (1.30)$$

式 (1.30) から、 $\bar{\rho}$ の変化が起こる空間スケール \bar{h}_d を見積ると、

$$\bar{h}_d = \left[\frac{1}{\bar{\rho}} \left| \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \right| \right]^{-1} \quad (1.31)$$

$$= \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\chi}_a \bar{g}} = \frac{\bar{\gamma} \bar{C}_p}{\bar{\alpha} \bar{g}} \quad (1.32)$$

ここで、Grüneisen parameter γ

$$\gamma = \frac{\alpha}{\rho C_v \chi_T} = \frac{\alpha}{\rho C_p \chi_a} \quad (1.33)$$

を導入した。式 (1.32) で定義された \bar{h}_d が b よりも十分大きければ、 $\bar{\rho}$ の空間変化を無視してもよいであろう。即ち、

$$1 \gg \frac{b}{\bar{h}_d} = \frac{b \bar{\alpha} \bar{g}}{\bar{\gamma} \bar{C}_p}$$

右辺をスケールリングしてやると

$$1 \gg \frac{\bar{\alpha}^* \bar{g}^*}{\bar{\gamma}^* \bar{C}_p^*} \frac{\alpha_r g_r b}{\gamma_r C_{pr}} = \frac{\bar{\alpha}^* \bar{g}^*}{\bar{\gamma}^* \bar{C}_p^*} \frac{D}{\gamma_r} \quad (1.34)$$

ここで

$$D \equiv \frac{\alpha_r g_r b}{C_{pr}} \quad (1.35)$$

は Dissipation number と呼ばれる量である。Dissipation number と Grüneisen parameter の比 D/γ_r はマントルの厚さとマントル内の密度変化の空間スケールとの比を表わす。式 (1.34) より、Boussinesq 近似とは、 $D/\gamma_r \rightarrow 0$ とした極限に相当する。しかし、実際のマントルでは $D \sim 0.5$ 、 $\gamma \sim 1$ と見積られる。Boussinesq 近似は式が簡便なためよく用いられるが、実際はその程度でしか正しくないことに注意しよう。

Navier-Stokes 方程式 (1.10) のスケールリングを行なう。スケールリングされた状態方程式 (1.25) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T^* p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T r^* \epsilon) \frac{Dv_i^*}{Dt^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \\ &+ \rho_r \chi_{Tr} g_r b \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T^* p^* - \frac{b^3 \rho_r^2 C_{pr} g_r \alpha_r \Delta T_r}{\mu_r k_r} \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* T r^* \end{aligned}$$

式 (1.33) と (1.35) より、右辺第 3 項は

$$\frac{D}{\gamma_r} \frac{C_{pr}}{C_{vr}} \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T^* p^*$$

となり、右辺第 4 項から新たな無次元量 Ra を

$$Ra \equiv \frac{b^3 \rho_r^2 C_{pr} g_r \alpha_r \Delta T_r}{\mu_r k_r} \quad (1.36)$$

と定義する。 Ra は Rayleigh 数と呼ばれる。これらを用いると、スケーリングされた Navier-Stokes 方程式は結局

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T^* p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* Tr^* \epsilon) \frac{Dv_i^*}{Dt^*} = & -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T^* p^* \frac{D}{\gamma_r} \frac{C_{pr}}{C_{vr}} \\ & - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* Tr^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

となる。ここで $1/Pr \rightarrow 0$ であることを考えると、式 (1.37) の左辺は無視することができる。これより、非弾性近似を適用した場合には式 (1.37) は

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T^* p^* \frac{D}{\gamma_r} \frac{C_{pr}}{C_{vr}} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* Tr^* Ra \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

となる。式 (1.38) の右辺より、対流を駆動する浮力には、(i) 温度変化による密度変化 (第 3 項)、及び (ii) 圧力変化による密度変化 (第 2 項)、の 2 つの寄与があることが分かる。しかし一般的には、(ii) の寄与を無視して、

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* Tr^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.39)$$

とした方程式を用いることが多い。これを「打ち切りされた非弾性近似 (truncated anelastic liquid approximation)」と呼ぶ。この場合、浮力に寄与するのは温度変化による密度変化のみになる。さらに、Boussinesq 近似を施すと、

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \bar{g}_i^* Tr^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (1.40)$$

と簡単化される。ただしここでは Boussinesq 近似を利用して、 $\bar{\rho}^* = \bar{\alpha}^* = \text{const.} \equiv 1$ かつ $\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = 0$ を用いた。

最後に、熱エネルギーの保存則 (1.22) 式のスケーリングを行なう。スケーリングされた状態方程式 (1.25) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T^* p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* Tr^* \epsilon) \bar{C}_p^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + Tr^*) - \underbrace{\frac{\alpha_r \mu_r k_r}{b^2 \rho_r^2 C_{pr}^2}}_{= \frac{\epsilon D}{Ra}} \bar{\alpha}^* (\bar{T}^* + Tr^*) \frac{D}{Dt^*} (\bar{p}^* + p^*) \\ = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + Tr^*) \right] + \underbrace{\frac{\mu_r k_r}{b^2 \rho_r^2 C_{pr}^2 \Delta T_r}}_{= \frac{D}{Ra}} \Phi^* + \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T^* p^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* Tr^* \epsilon) H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \end{aligned}$$

ここで、内部発熱率の基準値 H_r を導入した。さらに左辺第 2 項に含まれる、圧力の基本場 \bar{p}^* の Lagrange 微分の項を変形する。基本場は時間変化しないと仮定しているので、

$$\frac{D\bar{p}^*}{Dt^*} = \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial t^*} + v_i^* \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} = v_i^* \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*}$$

一方、式 (1.24) をスケーリングすると

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} = \frac{b^3 \rho_r^2 C_{pr} g_r}{\mu_r k_r} \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* = \frac{Ra}{\epsilon} \bar{\rho}^* \bar{g}_i^*$$

であるから結局

$$\frac{D\bar{p}^*}{Dt^*} = \frac{Ra}{\epsilon} \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* v_i^*$$

これを代入して整理すると、スケーリングされた熱エネルギーの保存則は結局、

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T \rho^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T r^* \epsilon) \bar{C}_p^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T r^*) - \bar{\alpha}^* (\bar{T}^* + T r^*) \frac{D\rho^*}{Dt^*} \frac{\epsilon D}{Ra} - \bar{\alpha}^* (\bar{T}^* + T r^*) \bar{g}_i^* v_i^* \bar{\rho}^* D \\ = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* (1 + \bar{\chi}_T \rho^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T r^* \epsilon) H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

これに非弾性近似を適用すると、

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T r^*) - \bar{\alpha}^* (\bar{T}^* + T r^*) \bar{g}_i^* v_i^* \bar{\rho}^* D = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \quad (1.42)$$

を得る。

温度の基本場 \bar{T}^* をしかるべく仮定すると、式 (1.42) はさらに簡単化できる。基本場は時間変化しないと仮定しているので、

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{D\bar{T}^*}{Dt^*} = \bar{\rho}^* \bar{C}_p^* v_i^* \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x_i^*}$$

加えて、基本場は断熱的であると仮定すると、断熱温度勾配の式 (A.19) をスケーリングすることにより、

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x_i^*} = \frac{\alpha_r g_r b}{C_{pr}} \frac{\bar{\alpha}^* \bar{g}_i^*}{C_p^*} \bar{T}^* = D \frac{\bar{\alpha}^* \bar{g}_i^*}{C_p^*} \bar{T}^*$$

となる。これより、

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{D\bar{T}^*}{Dt^*} = \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{T}^* D \bar{g}_i^* v_i^* \quad (1.43)$$

が得られる。式 (1.43) を式 (1.42) に代入してやると、非弾性近似における熱エネルギーの保存則

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{DT r^*}{Dt^*} - \bar{\alpha}^* T r^* \bar{g}_i^* v_i^* \bar{\rho}^* D = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \quad (1.44)$$

が得られる。左辺第 2 項が断熱温度勾配に沿った温度変化の効果を表わしている。加えて熱伝導率などが一様であると仮定すれば、右辺第 1 項内の熱伝導項を簡単にもできる。さらに Boussinesq 近似を適用すると、 $D \rightarrow 0$ の場合には断熱温度勾配が 0 になるので、

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{DT r^*}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\bar{k}^* \frac{\partial T r^*}{\partial x_i^*} \right) + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \quad (1.45)$$

となる。

以上で、マントル対流向けの基礎方程式系の近似が完了した。

これまでに適用した非弾性近似と Boussinesq 近似の他に、マントル対流シミュレーションには「拡張された Boussinesq 近似」(extended Boussinesq approximation) なる近似が使われることもある。この近似は、Boussinesq 近似で課された $D/\gamma_r \rightarrow 0$ の条件を $D \rightarrow 0$ ではなく、 $\gamma \rightarrow \infty$ かつ $D \neq 0$ として適用するものである。この場合、質量保存則と Navier-Stokes 方程式は Boussinesq 近似によるもの (式 (1.3) 及び (1.40)) と同じになり、熱エネルギー保存則は非弾性近似によるもの (式 (1.44)) を用いることになる。

1.2.1 てっとり早く知りたい方のための基礎方程式のまとめ

1. 基礎方程式の一般形 (次元つき)

- 質量保存則

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] + \rho g_i \quad (1.10)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi + \rho H \quad (1.22)$$

2. 非弾性近似 ($\epsilon \ll 1$, $M^2 Pr \ll 1$) かつ Prandtl 数無限大の場合 (次元なし)

- 基本場は運動なし、定常、静水圧的、かつ断熱的とした

- 質量保存則

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{\rho}^* v_i^*) = 0 \quad (1.28)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T p^* \frac{D}{\gamma_r} \frac{C_{p_r}}{C_{v_r}} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* T^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.38)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} - \bar{\alpha}^* T^* \bar{g}_i^* v_i^* \bar{\rho}^* D = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \quad (1.44)$$

ちなみに、次元つきの量に戻して書き直すと以下のようなになる。

- 質量保存則

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} v_i) = 0 \quad (1.46)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \bar{\rho} \bar{g}_i (\bar{\chi}_T p - \bar{\alpha} T) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.47)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\bar{\rho} \bar{C}_p \frac{DT}{Dt} - \bar{\alpha} T \bar{g}_i v_i \bar{\rho} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{k} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{T} + T) \right] + \Phi + \bar{\rho} H \quad (1.48)$$

3. 打ち切りされた非弾性近似 ($\epsilon \ll 1$, $M^2 Pr \ll 1$, 圧力変化に起因する浮力を無視) かつ Prandtl 数無限大の場合 (次元なし)

- 基本場は運動なし、定常、静水圧的、かつ断熱的とした

- 質量保存則

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{\rho}^* v_i^*) = 0 \quad (1.28)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* T^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.38)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} - \bar{\alpha}^* T^* \bar{g}_i^* v_i^* \bar{\rho}^* D &= \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\bar{k}^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T^*) \right] \\ &+ \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

4. Boussinesq 近似 ($\epsilon \ll 1$, $M^2 Pr \ll 1$, $D \ll 1$) かつ Prandtl 数無限大の場合 (次元なし)

- 基本場は運動なし、定常、 $\bar{\rho}$, \bar{C}_p , $\bar{\alpha}$ が一定

- 質量保存則

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1.29)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \bar{g}_i^* T^* Ra + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (1.40)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\bar{k}^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \right) + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \quad (1.45)$$

ちなみに、次元つきの量に戻して書き直すと以下ようになる。

- 質量保存則

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.29)$$

- 運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \bar{\rho} \bar{g}_i \bar{\alpha} T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.40)$$

- 熱エネルギー保存則

$$\bar{\rho} \bar{C}_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{k} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \bar{\rho} H \quad (1.45)$$

ただし、以下の無次元パラメータを含んでいる。

$$Pr = \text{Prandtl number} \quad \equiv \frac{\mu_r C_{p_r}}{k_r} \quad (1.26)$$

$$\epsilon \quad \equiv \alpha_r \Delta T_r \quad (1.26)$$

$$M^2 \quad \equiv \frac{k_r^2 \chi T_r}{\rho_r C_{p_r}^2 b^2} \quad (1.26)$$

$$D = \text{Dissipation number} \quad \equiv \frac{\alpha_r g_r b}{C_{p_r}} \quad (1.35)$$

$$Ra = \text{Rayleigh number} \quad \equiv \frac{b^3 \rho_r^2 C_{p_r} g_r \alpha_r \Delta T_r}{\mu_r k_r} \quad (1.36)$$

$$Ra_H = \text{internal heating Rayleigh number} \quad \equiv \frac{b^5 \rho_r^3 C_{p_r} g_r \alpha_r H_r}{\mu_r k_r^2} \quad (1.49)$$

1.3 マントル対流の基本場の設定

ここでは、先の導出では十分に検討しなかった、基本場の設定について論じる。以下のいずれの場合も、運動がなく静水圧的で、かつ定常な状態を基本場とする。

基本場とは、基礎方程式の扱いを容易にするための数学的な方便の一つというべきものである。必ずしも現実に存在しなくてもよい。しかしながら、特に圧縮性を考える際には注意が必要である。なぜなら、状態方程式を指定するのみならず、必要な熱力学変数を正しく（熱力学に則って）扱う必要があるからである。

1.3.1 Boussinesq 近似の場合

Boussinesq 近似の場合には、基本場の設定は極めて簡単である。その理由の1つは、基本場での密度分布 $\bar{\rho}$ を一定とみなしてよいからである。

まず基本場での圧力分布を考えてみよう。そのためには静水圧を記述する式 (1.24) を積分すればよい。式 (1.24) の積分には重力加速度が必要だが、デカルト座標系の場合にはこれを一定とみなしてもよいであろうから、結局

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{g} z$$

と書ける。ここで重力は z 軸の正の向きに働くものとし、かつ $\bar{p}(z=0) = 0$ とした。一方、3次元球殻モデルを考える場合には、半径方向に重力加速度が変化することを考慮する必要があるであろう。例えば外径 a 、内径 c の3次元球殻領域をとり、マントルの密度を ρ_m 、コアの密度を ρ_c とすると

$$\bar{g}(r) = \frac{G\bar{M}(r)}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho_c Gr \quad (\text{for } 0 \leq r \leq c) \quad (1.50)$$

$$= \frac{4}{3}\pi G \left[r\rho_m + \frac{c^3}{r^2}(\rho_c - \rho_m) \right] \quad (\text{for } c \leq r \leq a) \quad (1.51)$$

となる。またこの場合の静水圧を記述する式は

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\bar{\rho} \bar{g}(r) \quad (1.52)$$

となるから、(1.51) と (1.52) より

$$\begin{aligned} \bar{p}(r) &= \frac{4}{3}\pi\rho_m Gc^3(\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) + \frac{2}{3}\pi G\rho_m^2 (a^2 - r^2) \quad (\text{for } c \leq r \leq a) \\ &= \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 (c^2 - r^2) + \frac{2}{3}\pi G\rho_m^2 (a^2 - c^2) + \frac{4}{3}\pi\rho_m Gc^3(\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \quad (\text{for } 0 \leq r \leq c) \end{aligned} \quad (1.53)$$

を得る。ただしここでも $\bar{p}(r=a) = 0$ とした。

次に温度の基本場について考える。Boussinesq 近似では断熱温度勾配が0であるから、 \bar{T} を一定にとるのが最も簡単である。しかしこれとは異なる \bar{T} を採用することも可能である。例えば

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) + \bar{\rho} H \quad (1.54)$$

で与えられる1次元定常熱伝導状態の解をとることもできる。デカルト座標系のもとで具体的に書くと

$$0 = \frac{d}{dz} \left(\bar{k} \frac{d\bar{T}}{dz} \right) + \bar{\rho} H \quad (1.55)$$

あるいは3次元球殻モデルでは

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \bar{k} \frac{d\bar{T}}{dr} \right) + \bar{\rho} H \quad (1.56)$$

である。これに加えて \bar{k} と H の関数形を与えれば \bar{T} が求まる。例えば \bar{k} と H の両方とも一定であるとすれば簡単に積分できて結局、

$$T(z) = -\frac{\bar{\rho}H}{2\bar{k}}z^2 + c_1z + c_2 \quad (1.57)$$

$$T(r) = -\frac{\bar{\rho}H}{6k}z^2 + \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (1.58)$$

を得る。ここで c_1 及び c_2 は境界条件によって決まる積分定数である。

1.3.2 非 Boussinesq 近似の場合

次に圧縮性流体あるいは非弾性流体の場合を考える。この場合は、密度 ρ や熱膨張率 α などの物性値の深さ (圧力) 変化を自然に取り込める利点はあるものの、そのために基本場の状態が簡単に求まらないという難点もある。また、研究者によって基本場のとり方もまちまちであったりもする。

ここでは熱力学に極力則った形式で、基本場の状態を求めていくことにする。この場合、基本場を規定する以下の方程式系

1. 静水圧の関係式 (1.24)

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = \bar{\rho}\bar{g} \quad (1.59)$$

$$\text{or } \frac{d\bar{p}}{dr} = -\bar{\rho}\bar{g} \quad (1.52)$$

2. 断熱的な圧力変化と温度変化の関係 (A.16)

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{p}} = \frac{\bar{\alpha}\bar{T}}{\bar{\rho}\bar{C}_p} \quad (1.60)$$

3. 断熱圧縮率の熱力学的な定義 (A.12)

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{p}} = \bar{\chi}_a \quad (1.61)$$

4. Grüneisen parameter (1.33)

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\rho}\bar{C}_p\bar{\chi}_a} \quad (1.62)$$

を適当な仮定のもとで積分することにより、基本場を構成することになる。ただし、8個の未知量 (\bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{g} , \bar{T} , $\bar{\alpha}$, \bar{C}_p , $\bar{\chi}_a$, $\bar{\gamma}$) を決定するには、上の4式の他に4つの条件を指定する必要がある。

デカルト座標系の場合によく用いられるもの 1つの簡単な例は、 \bar{g} , \bar{C}_p , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ を一定と仮定してしまうことにより得られる。まず式 (1.62)、(1.59)、(1.61) から Adams-Willamson の式

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \bar{\rho}\bar{g}\bar{\chi}_a = \frac{\bar{g}\bar{\alpha}}{\bar{C}_p\bar{\gamma}} \quad (1.63)$$

が導かれる。仮定により式 (1.63) の右辺は定数なので、解析的に積分してやると

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}(z=0) \exp\left[\frac{\bar{g}\bar{\alpha}}{\bar{C}_p\bar{\gamma}}z\right] = \bar{\rho}(z=0) \exp\left[\frac{z}{h_d}\right] \quad (1.64)$$

を得る。ここで h_d は式 (1.31) で定義した、密度変化のスケールハイトである。また z を対流層の厚さ b で無次元化してやると、

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}(z=0) \exp\left[\frac{z}{b} \frac{b}{h_d}\right] = \bar{\rho}(z=0) \exp\left[\frac{z}{b} \frac{\bar{D}}{\bar{\gamma}}\right] \quad (1.65)$$

となる。ここで

$$\bar{D} = \frac{\bar{\alpha} \bar{g} b}{C_p} \quad (1.66)$$

は基本場の dissipation number (式 (1.35) を見よ) である。式 (1.64) で得られた $\bar{\rho}$ を式 (1.59) に代入して積分すると、基本場の圧力分布が

$$\bar{p}(z) = \bar{\rho}(z=0) \bar{g} \bar{h}_d \left[\exp\left(\frac{z}{\bar{h}_d}\right) - 1 \right] \quad (1.67)$$

と求まる。ただし $\bar{p}(z=0) = 0$ とした。基本場の温度分布についても同様である。式 (1.59) と (1.60) より

$$\frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{\bar{\alpha} \bar{g}}{C_p} \quad (1.68)$$

が得られ、さらに積分すると

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z=0) \exp\left(\frac{\bar{\alpha} \bar{g}}{C_p} z\right) = \bar{T}(z=0) \exp\left(\bar{\gamma} \frac{z}{\bar{h}_d}\right) = \bar{T}(z=0) \exp\left(z \frac{\bar{D}}{b}\right) \quad (1.69)$$

となる。圧力変化と密度変化のスケールハイトは \bar{h}_d で共通だが、温度変化のスケールハイトは $\bar{h}_d/\bar{\gamma} = b/\bar{D}$ である。この基本場の欠点は、深部で対流が起こりにくくなることである。なぜなら、式 (1.68)、(1.69) より断熱温度勾配を求めてみると

$$\left(\frac{d\bar{T}}{dz}\right)_a = \frac{\bar{\alpha} \bar{g}}{C_p} \bar{T} = \frac{\bar{\alpha} \bar{g} \bar{T}(z=0)}{C_p} \exp\left(\bar{\gamma} \frac{z}{\bar{h}_d}\right) = \left(\frac{d\bar{T}}{dz}\right)_a(z=0) \exp\left(\bar{\gamma} \frac{z}{\bar{h}_d}\right) \quad (1.70)$$

即ち、断熱温度勾配が深さとともに指数関数的に増大してしまうことになるからである。

これに対し、Tackley [9] では、上とは異なった方法が用いられている。ここでは \bar{g} 、 \bar{C}_p は一定とみなすものの、 $\bar{\alpha}$ と $\bar{\gamma}$ は以下のような関数形で密度に依存して変化すると仮定する。

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \exp\left\{-\frac{\delta_{T_o}}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^\kappa\right]\right\} \quad (1.71)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_o} = \frac{\rho_o}{\rho} \quad (1.72)$$

ここで、式 (1.71) は経験的に得られている Anderson-Grüneisen parameter δ_T

$$\delta_T \equiv \left(\frac{\partial \ln \alpha}{\partial \ln \rho}\right)_T = \delta_{T_o} \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^\kappa \quad (1.73)$$

が断熱線に沿っても成り立つとの仮定による。式 (1.73) に現われる δ_T はおよそ 4 ~ 6、 κ はおよそ 1.4 程度の値を持つことが実験的に知られている。また式 (1.72) は Mie-Grüneisen の状態方程式からの派生である (おそらく)。以上の条件式を数値的に積分することにより基本場が構成できる。

1.4 相転移の取り扱い

相転移を厳密に熱力学に則って計算するのは繁雑である。ここではマントル対流業界でよく用いられている、拡張された Boussinesq 近似のもとでの phase function に基づく扱いについて紹介する。以下の記述は主に [2] を参考にした。また以下では簡単のため相転移は 1 つのみと仮定しているが、相転移が複数ある場合も同様な定式化により取り扱いが可能である。

方程式を簡単化するため、以下では Clapeyron 勾配 γ を一定にとり、相転移が起こる圧力 p_t を温度 T の関数として

$$p_t(T) = p_o + \gamma T \quad (1.74)$$

と仮定する。ここで p_o は温度 $T = 0$ において相転移が起こる圧力である。この値からの圧力のずれによって相転移の起こり方が決まると仮定しよう。そこで以下のように余剰圧力 (excess pressure) とでもいべき量 π を定義する。

$$\pi = p - p_t(T) = p - p_o - \gamma T \quad (1.75)$$

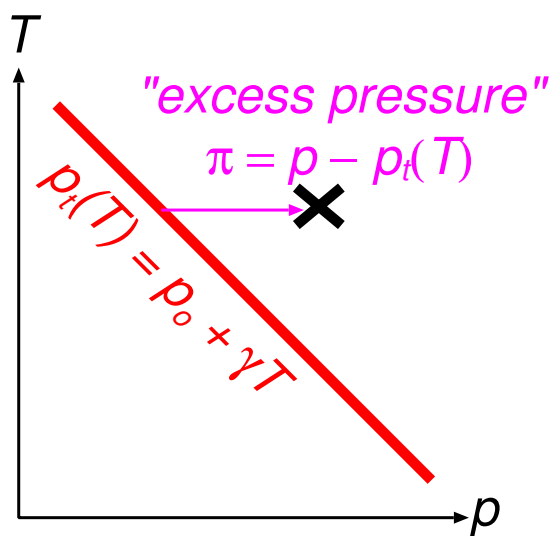


図 1: 仮定している相平衡図、及び相転移の計算に用いる “excess pressure” π の定義の概念図。

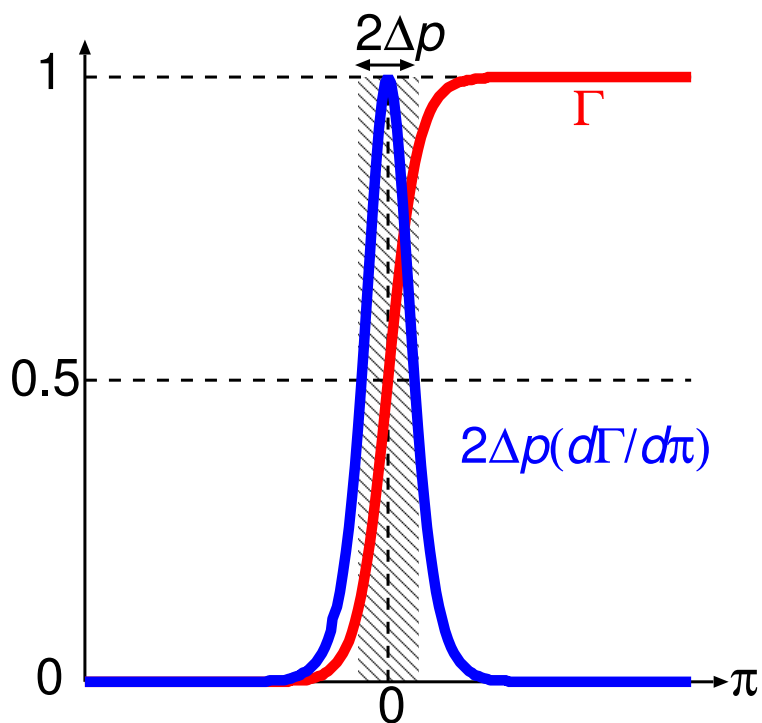


図 2: よく用いられる phase function Γ とその微分 $\frac{d\Gamma}{d\pi}$ のグラフ。

(実際には静水圧を仮定して圧力を深さに読み換える。) さらに、2つの相の分率を表わす phase function Γ (ただし $0 \leq \Gamma \leq 1$ 、 $\Gamma = 0$ で低圧相、 $\Gamma = 1$ で高圧相) を π の関数として導入する。よく使われる形は

$$\Gamma(\pi) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\pi}{\Delta p} \right) \right] \quad (1.76)$$

である。ここで、 Δp は相転移にかかる圧力の幅に相当するパラメータである。また、式 (1.76) を π で微分すると、

$$\frac{d\Gamma}{d\pi} = \frac{1}{2\Delta p} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\pi}{\Delta p} \right) \right] = \frac{2}{\Delta p} \Gamma(1 - \Gamma) \quad (1.77)$$

となる。これらのグラフを図 2 に示す。この関数 Γ は相転移を数値的に簡便に取り扱うために恣意的に導入したに過ぎないことに注意しよう。しかも後に見るように、 Γ の関数形そのものではなく、その微分 $\frac{d\Gamma}{d\pi}$ のみが意味を持っているので、式 (1.76) を盲目的に信じる必要もない。実際に Honda et al. [4] などでは、 $\frac{d\Gamma}{d\pi}$ を Gaussian と仮定してシミュレーションを行っている。

phase function Γ を用いて、マンテル対流の基礎方程式に相転移の効果を導入することを考えよう。以下では簡単のため、密度と比エントロピー以外の全ての熱力学的な量は相転移によって不変である (1 次の相転移に相当) と仮定する。まず状態方程式を修正しよう。マンテル物質の密度は温度 T と圧力 p に加え、phase function Γ にも依存する関数で与えられるとしよう。

$$\rho = \rho(T, p, \Gamma)$$

1.2 章の取り扱いに倣い、密度分布を基本場 (ℓ つき) と基本場からのずれ (l つき) の 2 つに分離すると、

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' = \rho(\bar{T} + T', \bar{p} + p', \bar{\Gamma} + \Gamma') \\ &\simeq \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}, \bar{\Gamma}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, \Gamma} p' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \Gamma} T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \Gamma} \right)_{p, T} \Gamma' \\ &= \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}, \bar{\Gamma}) + \bar{\rho} \bar{\chi}_T p' - \bar{\alpha} \bar{\rho} T' + \bar{\Delta} \rho \Gamma' \end{aligned} \quad (1.78)$$

ここで、 $\bar{\Delta} \rho \equiv \bar{\rho}_h - \bar{\rho}_\ell$ は高圧相と低圧相の密度差である。(今後も同様に、下つき添字 ℓ で低圧相、 h で高圧相を示す。) 以下では簡便のため $\frac{\bar{\Delta} \rho}{\bar{\rho}} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$ と書き、これを一定とみなす。式 (1.25) に倣ってスケールリングを施すと、

$$\frac{\rho^*}{\bar{\rho}^*} = 1 + \bar{\chi}_T^* p'^* M^2 Pr - \bar{\alpha}^* T'^* \epsilon + \Gamma' \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (1.79)$$

を得る。同様に、エントロピーの変化量 (式 (1.21)) は以下のように修正されるべきであろう。

$$ds = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp - \Delta s d\Gamma \quad (1.80)$$

ここで、 $\Delta s \equiv s_\ell - s_h$ は低圧相と高圧相の比エントロピーの差である。なお、Clausius-Clapeyron の式 (A.24) より、 Δs と $\Delta \rho$ の間には

$$\gamma = \frac{s_\ell - s_h}{\rho_\ell^{-1} - \rho_h^{-1}} = \rho_\ell \rho_h \frac{s_\ell - s_h}{\rho_h - \rho_\ell} = \rho_\ell \rho_h \frac{\Delta s}{\Delta \rho} \quad (1.81)$$

なる関係がある。これを用いれば式 (1.80) は、

$$ds = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp - \frac{\gamma \Delta \rho}{\rho^2} d\Gamma \quad (1.82)$$

とも表わすことができる (ここで $\rho_\ell \rho_h \simeq \rho^2$ と近似した)。

これらを用いて、拡張された Boussinesq 近似のもとでの基礎方程式を修正してみよう。この場合、質量保存則は Boussinesq 近似と同じ非圧縮の仮定 (式 (1.29)) を用いてよい。以下では Navier-Stokes 方程式と

熱エネルギーの保存則がどのように修正されるべきかを論じる。相転移による密度変化の影響を考慮すると、スケーリングされた非弾性近似のもとでの Navier-Stokes 方程式は

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \bar{\chi}_T p^* \frac{D C_{pr}}{\gamma_r C_{vr}} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* T^* Ra + \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* \Gamma' Rb + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.83)$$

と書ける。ここで新たな無次元量 Rb を

$$Rb \equiv \frac{b^3 \rho_r^2 C_{pr} g_r \Delta \rho}{\mu_r k_r \rho} \quad (1.84)$$

と置いた。これは相転移による密度変化が対流を促進(または抑制)する効果の強さを表わす量で、phase boundary Rayleigh 数と呼ばれることもある。さらに Boussinesq 近似を施すと、

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \bar{\rho}^* \bar{\alpha}^* \bar{g}_i^* T^* Ra + \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* \Gamma' Rb + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.85)$$

を得る。これと式 (1.37) と比較すると、温度変化による密度変化に加え、相転移による密度変化が浮力に寄与していることが分かる。

次に、熱エネルギーの保存則を修正する。式 (1.82) を式 (1.16) に代入すると、

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} - T \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi + \rho H \quad (1.86)$$

となる。左辺第 3 項が相転移によって新たに付け加わった項であり、これは相転移によるエントロピー変化の効果を表わしている。次にこの式のスケーリングを試みる。左辺第 1 項、第 2 項、及び右辺は式 (1.41) などと同じなので省略し、式 (1.41) の導出にならって左辺第 3 項のスケーリングを考えると、

$$\begin{aligned} -T \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{D\Gamma}{Dt} &\Rightarrow -\Delta T_r (\bar{T}^* + T^*) \frac{\rho_r g_r b}{\Delta T_r} \gamma^* \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{k_r}{b^2 \rho_r C_{pr}} \frac{D\Gamma}{Dt^*} \\ &= -\frac{k_r \Delta T_r}{b^2} \underbrace{\frac{g_r b}{C_{pr} \Delta T_r} \frac{\Delta \rho}{\rho}}_{=D \frac{Rb}{Ra}} \gamma^* (\bar{T}^* + T^*) \frac{D\Gamma}{Dt^*} \end{aligned} \quad (1.87)$$

ここで、Clapeyron 勾配 γ に含まれる圧力は静水圧 $\rho_r g_r b$ によりスケーリングした。これより、非弾性近似のもとでのスケーリングされた熱エネルギーの保存則は、

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* \bar{C}_p^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T^*) - D \bar{\alpha}^* (\bar{T}^* + T^*) \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* v_i^* - D \frac{Rb}{Ra} \gamma^* (\bar{T}^* + T^*) \frac{D\Gamma}{Dt^*} \\ = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[k^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \end{aligned} \quad (1.88)$$

相転移の効果は左辺第 3 項に含まれている。この項は Dissipation number D でスケーリングされていることに注意しよう。これより、 $D \rightarrow 0$ の極限では熱輸送に相転移の効果は現われないことが分かる¹。

これまでに議論した基礎方程式の導出は、phase function Γ の具体的な関数形にはよらないものであった。また式 (1.88) には Γ の Lagrange 微分が含まれているので、解くのが少々面倒である。そこで、式 (1.75) 及び (1.76) を用いてこれらの式をより簡便な形に書き直してみる。式 (1.75) 内の余剰圧力を静水圧 $\rho_r g_r b$ でスケーリングすると、

$$\begin{aligned} \pi^* &= \frac{1}{\underbrace{\rho_r g_r b}_{= \frac{\epsilon}{Ra}} \frac{b^2 \rho_r C_{pr}}{b^2 \rho_r C_{pr}}} (p^* - p_t^*) - \gamma^* T^* \\ &= \frac{\epsilon}{Ra} \end{aligned}$$

¹この議論から、Boussinesq 近似のもとでは相転移の潜熱の効果を無視することが多い。ただし、Ogawa and Nakamura [5] によれば、固相-液相の相転移では Boussinesq 近似であっても潜熱の効果は必ずしも無視すべきではないと指摘されている。

ここで、 $\frac{\epsilon}{Ra}$ なる因子は圧力のスケージングに用いた基準値の違いに起因している。これを用いると、phase function Γ の微小変化は

$$\delta\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \delta\pi^* = \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \left(\frac{\epsilon}{Ra} \delta p^* - \gamma^* \delta T^* \right)$$

と与えられる。これを Navier-Stokes 方程式 (1.83) に代入、整理すると、

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \bar{g}_i^* \bar{\rho}^* \chi_T^* p^* \frac{D C_{pr}}{\gamma_r C_{vr}} - \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* T r^* Ra \left(\bar{\alpha}^* + \gamma^* \frac{Rb}{Ra} \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.89)$$

を得る。これと式 (1.38) を比較すると、相転移による密度変化の影響は、実効的な熱膨張率を

$$\alpha_{eff}^* \equiv \bar{\alpha}^* + \gamma^* \frac{Rb}{Ra} \frac{d\Gamma}{d\pi^*} = \bar{\alpha}^* + P \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \quad (1.90)$$

の如く定義し直したことと同じである。ここで新たな無次元量 P を

$$P \equiv \gamma^* \frac{Rb}{Ra} \quad (1.91)$$

と置いた。これは時に phase buoyancy parameter とも呼ばれる。熱輸送方程式 (1.88) の左辺第 3 項も同様に变形しよう。

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt^*} &= \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \frac{D\pi^*}{Dt^*} = \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \left[\frac{\epsilon}{Ra} \frac{Dp^*}{Dt^*} - \gamma^* \frac{DT^*}{Dt^*} \right] = \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \left[\underbrace{\frac{\epsilon}{Ra} \frac{Dp^*}{Dt^*}}_{=\bar{\rho}^* \bar{g}_i^* v_i^*} + \underbrace{\frac{\epsilon}{Ra} \frac{Dp^*}{Dt^*}}_{=0} - \gamma^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] \\ &= \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \left[\bar{\rho}^* \bar{g}_i^* v_i^* - \gamma^* \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] \end{aligned} \quad (1.92)$$

これを (1.88) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \left[\bar{\rho}^* \bar{C}_p^* + D \frac{Rb}{Ra} \gamma^{*2} (\bar{T}^* + T r^*) \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \right] \frac{D}{Dt^*} (\bar{T}^* + T r^*) - D (\bar{T}^* + T r^*) \left(\bar{\alpha}^* + \gamma^* \frac{Rb}{Ra} \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \right) \bar{\rho}^* \bar{g}_i^* v_i^* \\ = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[k^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\bar{T}^* + T r^*) \right] + \Phi^* \frac{D}{Ra} + \bar{\rho}^* H^* \left(\frac{b^2 H_r \rho_r}{k_r \Delta T_r} \right) \end{aligned} \quad (1.93)$$

を得る。これと式 (1.42) を比較すると、相転移によるエントロピーの出入りは、式 (1.90) で与えられる実効的な熱膨張率に加え、実効的な熱容量を

$$(\rho C_p)_{eff} \equiv \bar{\rho}^* \bar{C}_p^* + D \frac{Rb}{Ra} \gamma^{*2} (\bar{T}^* + T r^*) \frac{d\Gamma}{d\pi^*} \quad (1.94)$$

の如く定義し直したことと同じであることが分かる。

式 (1.89) 及び (1.93) をまとめると、相転移の効果は以下の 3 つに分かれていることが理解できる。

1. 温度の違いによる相転移境界のずれ。これは式 (1.89) の右辺第 3 項の、相転移による浮力の変化として現われる。
2. 潜熱の出入りによる温度変化。これは式 (1.93) の左辺第 2 項の、相転移による断熱温度勾配の変化として現われる。
3. 潜熱の出入りによる温度変化が原因となる相転移境界のずれ。これは式 (1.93) の左辺第 2 項の、相転移による熱容量の変化として現われる。

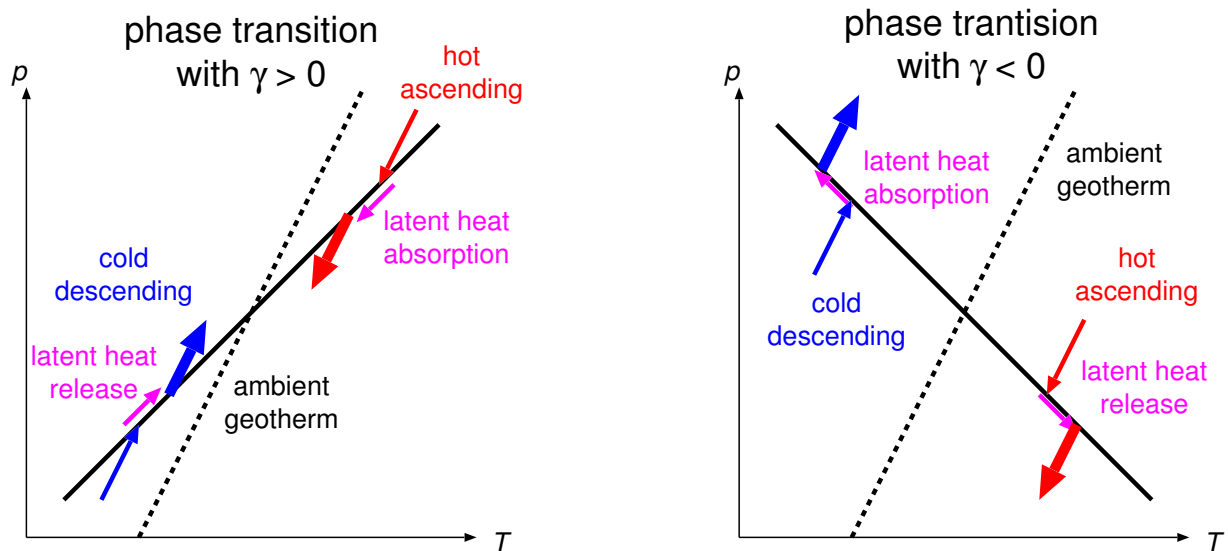


図 3: 相転移が流れに及ぼす影響の概念図。Schubert et al. [6] より改。

ただし Boussinesq 近似を扱う場合には潜熱の出入りは無視されるので、上記の (2) 及び (3) の効果は含まれない。また、(3) の効果を残すと式 (1.93) が温度に関して非線型になってしまうため、この効果は多くの場合は無視されている。とはいえ無次元化された Clapeyron 勾配の値は通常小さいので、 γ^{*2} を含む項を落とすことによる悪影響は小さいと期待される。

上記の (1) と (2) の効果対流に及ぼす影響を図 3 に概念的に示す。一例として低温の下降流の挙動にのみ注目して考える。まず (1) 温度の違いによる相転移境界のずれの効果のみを考えよう。 $\gamma > 0$ の場合、低温の下降流は周囲より浅い部分で高密度の相へ転移する。即ち、より大きな負の浮力を獲得することができる。逆に $\gamma < 0$ の場合には下降流は周囲より深部で高密度の相へ転移するため、負の浮力を獲得できない。これより (1) の効果では、 $\gamma > 0$ の相転移はこれを横切る流れを加速し、その反対に $\gamma < 0$ の相転移は阻害する方向に働く。一方、(2) 潜熱の出入りによる温度変化は (1) と正反対の効果を持つ。低温の下降流が $\gamma > 0$ の相転移を通過する際に潜熱が解放される。即ち下降流内の温度が上がり、熱的な負の浮力が小さくなる。逆に $\gamma < 0$ の相転移を通過する際には潜熱が吸収され、下降流内の温度が下がり、熱的な負の浮力が大きくなる。これより (2) の効果では、 $\gamma > 0$ の相転移はこれを横切る流れを阻害し、その反対に $\gamma < 0$ の相転移は加速する方向に働く。ちなみに (3) の効果は、 γ の符号によらず、相転移を横切る流れを阻害する方向に働く。

また、さらなる簡略化として、相転移面の起こる位置の温度変化を無視するという近似もある。この場合、 $\frac{d\Gamma}{d\pi^*}$ の計算において温度 T を一定とみなし、これを深さのみの関数と仮定する。さらに、この $\frac{d\Gamma}{d\pi^*}$ をもとにして得られた α_{eff} を用いて、相転移における密度変化の影響を取り入れる。この近似では、温度分布が変化しても相転移面の位置を不変に保つことができることに加え、相転移による対流の層構造の有無に関してよい近似となっている [2] ので、計算の簡略化としてよく用いられている (例えば [4, 7] など)。

2 マントル対流の解析的研究

2.1 対流の起こり始めに関する線型安定性解析

ここでは線型安定性解析と呼ばれる理論に基づいて、熱対流の起こり始める条件について検討する。以下の手順は、[1, 8, 6, 10] などに倣った。

簡単のため、ブシネスク近似が成り立ち、かつ物性が一様な流体の、水平方向に無限の広がりをもつ 3 次

元領域の中での熱対流を仮定する。無次元化された基礎方程式を具体的に書き下すと、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + Ra T \delta_{iz} \quad (2.95)$$

$$0 = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_\ell^2} \quad (2.97)$$

ただし温度場 T の境界条件として

$$T = 0 \text{ at } z = 1, \quad T = 1 \text{ at } z = 0$$

鉛直方向速度 v_z の境界条件として

$$v_z = 0 \text{ at } z = 0, 1$$

を考える。また水平方向速度 v_x 及び v_y の境界条件は

$$\text{自由すべり境界 } \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.98)$$

$$\text{固着境界 } u_x = v_y = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.99)$$

のいずれかであるものとする。この種の問題では、Rayleigh 数がある値 Ra_c (臨界 Rayleigh 数) より大きければ対流が起こることが示されている。ここでは、線型安定性解析により Ra_c を求めてみる。線型安定性解析のよくある手順に倣い、各変数を基本場と微小な擾乱の和で書く。以下、添字 o つきで基本場を表わし、 $'$ つきで微小な擾乱を表わすことにする。

まず、基本場の表現を決定する。簡単のため、基本場は完全静止 ($v_{oi} = 0$) な熱伝導状態で、水平面内 (x -及び y -方向) には一様とする。この場合、基本場は以下のように表わせる。

$$0 = \frac{d^2 T_o}{dz^2} \Rightarrow T_o = 1 - z \quad (2.100)$$

$$0 = -\frac{dp_o}{dz} + Ra T_o \quad (2.101)$$

次に、微小な擾乱に関する式を求める。線型安定性解析の定石に倣い、擾乱は微小とみなして 1 次の項のみ残すと、速度及び圧力の微小な擾乱に関する式は以下のように書ける。

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2} + Ra T' \delta_{iz} \quad (2.102)$$

$$0 = \frac{\partial v_k'}{\partial x_k} \quad (2.103)$$

これらから v_x' 、 v_y' 、 p' を消去してやることにより、 v_z' (以下簡単のため w' と略記する) に関する式を得る。

$$\nabla^4 w' + Ra \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T' = 0 \quad (2.104)$$

同様に、温度場の微小擾乱に関する式を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} &= -v_j' \frac{\partial (T_o + T')}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 (T_o + T')}{\partial x_\ell^2} \simeq -v_j' \frac{\partial T_o}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 T'}{\partial x_\ell^2} \\ &= w' + \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (2.105)$$

さらに中立 (臨界) 状態を仮定して温度擾乱の時間変化がないとすれば、

$$0 = w' + \nabla^2 T' \quad (2.106)$$

(2.104) と (2.106) から T' を消去すれば、 w' のみを含んだ方程式

$$\nabla^6 w' = Ra \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' \quad (2.107)$$

を得る。また連続の式を使うことにより水平方向速度場の境界条件を w' を含む形で書き直せば

$$\text{自由すべり境界 } \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.108)$$

$$\text{固着境界 } \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.109)$$

を得る。同様に式 (2.104) を用いて T' の境界条件を w' のみで書き表わすと、

$$\nabla^4 w' = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.110)$$

となる。

これらは w' に関する定数係数の微分方程式であり、変数分離法により解を求めることができる。そこで

$$w' \equiv W(z) \exp [i(k_x x + i k_y y)] \quad (2.111)$$

なる形の解を仮定する。ここで i は虚数単位である。これを用いれば、解くべき方程式は結局

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right)^3 W + Ra K^2 W = 0 \quad (2.112)$$

$$\text{自由すべり境界の場合 } W = \frac{d^2 W}{dz^2} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right)^2 W = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.113)$$

$$\text{固着境界の場合 } W = \frac{dW}{dz} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2 \right)^2 W = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.114)$$

とまとめられる。ただし $K \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ は水平方向の擾乱の波数である。

2.1.1 上下の境界面がいずれも自由すべり面の場合

この場合が最も簡単に臨界 Rayleigh 数 Ra_c を求めることができる。境界条件 (2.113) より、 W は

$$W(z) = \sum_{n \geq 1} U_n \sin(n\pi z) \quad (2.115)$$

と書ける。これを式 (2.112) に代入して整理すると、

$$\sum_n U_n \sin(n\pi z) \left\{ -[(n\pi)^2 + K^2]^3 + Ra K^2 \right\} = 0 \quad (2.116)$$

これが自明 ($U_n = 0$) でない解を持つためには

$$-[(n\pi)^2 + K^2]^3 + Ra K^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Ra = \frac{[(n\pi)^2 + K^2]^3}{K^2} \quad (2.117)$$

と与えられる。

この最小値を求めよう。上式を K で微分して

$$\frac{dRa}{dK} = \frac{2[(n\pi)^2 + K^2]^2}{K^3} [2K^2 - (n\pi)^2] \quad (2.118)$$

これは

$$K = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \quad (2.119)$$

のとき 0 となり、その時の Ra は

$$Ra = \frac{\left[(n\pi)^2 + \frac{(n\pi)^2}{2} \right]^3}{\frac{(n\pi)^2}{2}} = \frac{27}{4} (n\pi)^4 \quad (2.120)$$

である。これから、 $n = 1$ のときに臨界 Rayleigh 数 Ra_c は最小値

$$Ra_c = \frac{27}{4} \pi^4 \simeq 657.51 \quad (2.121)$$

をとり、これを与える擾乱の水平方向波数 K は

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (2.122)$$

である。

2.1.2 上下の境界面がいずれも固着面の場合

この場合には、境界条件から $W(z)$ の関数形を直ちに推測することが困難である。そこで、解をより一般的な表現で書き表わした後に、境界条件を満足するようにとることにする。

$W(z)$ は $\exp(\pm qz)$ (ただし q は複素数) の線形結合 (即ち、 $\sin(qz)$ 、 $\cos(qz)$ 、 $\sinh(qz)$ 、 $\cosh(qz)$ の線形結合) で書けるはずである。この関数形を式 (2.112) に代入すると、自明でない解が存在するためには q は

$$(q^2 - K^2)^3 + RaK^2 = 0 \quad (2.123)$$

を満足しなければならない。これを解くため $Ra = \tau^3 K^2$ と置くと、

$$q^2 = -K^2 (\tau \sqrt[3]{1} - 1) \quad (2.124)$$

である。ただし

$$\sqrt[3]{1} = e^0, \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right), \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right) = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

は 1 の 3 乗根である。この 6 つの解を $\pm iq_0$ 、 $\pm q$ 、 $\pm q^*$ (* は複素共役) とおくと、

$$q_0 = K\sqrt{\tau - 1} \quad (2.125)$$

$$q_1 \equiv \Re(q) = \frac{K}{2} \left[\sqrt{1 + \tau + \tau^2} + \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2.126)$$

$$q_2 \equiv \Im(q) = \frac{K}{2} \left[\sqrt{1 + \tau + \tau^2} - \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2.127)$$

と書ける。またこれらの間には

$$(q_0^2 + K^2)^2 = K^4 \tau^2, \quad (q^2 - K^2)^2 = \frac{1}{2} K^4 \tau^2 (-1 \pm \sqrt[3]{1}) \quad (2.128)$$

なる関係がある。

以下、境界条件の対称性より、対流層の真ん中の深さを $z = 0$ 、かつ境界面の位置を $z = \pm 1/2$ ととり直す。また $z = 0$ に関する対称性から、 $W(z)$ は偶関数となるか奇関数となるかのいずれかである。しかし奇関数の解は $z = 0$ で節をもつ ($W(z = 0) = 0$) ので、いわゆる「基底状態」ではない。対流の起こり始めとしては、節のない偶関数の解が適当である。そこで、 $W(z)$ が偶関数となるような解を求めてみる。このとき $W(z)$ は

$$W(z) = a_0 \cos(q_0 z) + a_1 \cosh(qz) + a_1^* \cosh(q^* z) \quad (2.129)$$

と書けるはずである。これが境界条件を満たすように係数 a_0 、 a_1 、 a_1^* を定める。 $W(z)$ を微分すると、

$$\frac{dW}{dz} = -a_0 q_0 \sin(q_0 z) + a_1 q \sinh(qz) + a_1^* q^* \sinh(q^* z) \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2\right)^2 W &= a_0(q_0^2 + K^2)^2 \cos(q_0 z) + a_1(q^2 - K^2)^2 \cosh(qz) + a_1^*(q^{*2} - K^2)^2 \cosh(q^* z) \\ &= K^4 \tau^2 \left[a_0 \cos(q_0 z) + \frac{\sqrt{3}i - 1}{2} a_1 \cosh(qz) - \frac{\sqrt{3}i + 1}{2} a_1^* \cosh(q^* z) \right] \end{aligned} \quad (2.131)$$

$z = \pm 1/2$ での境界条件は

$$0 = a_0 \cos\left(\frac{q_0}{2}\right) + a_1 \cosh\left(\frac{q}{2}\right) + a_1^* \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right) \quad (2.132)$$

$$0 = -a_0 q_0 \sin\left(\frac{q_0}{2}\right) + a_1 q \sinh\left(\frac{q}{2}\right) + a_1^* q^* \sinh\left(\frac{q^*}{2}\right) \quad (2.133)$$

$$0 = a_0 \cos\left(\frac{q_0}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i - 1}{2} a_1 \cosh\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}i + 1}{2} a_1^* \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right) \quad (2.134)$$

これを整理すると

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{q_0}{2}\right) & \cosh\left(\frac{q}{2}\right) & \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right) \\ -q_0 \sin\left(\frac{q_0}{2}\right) & q \sinh\left(\frac{q}{2}\right) & q^* \sinh\left(\frac{q^*}{2}\right) \\ 0 & \cosh\left(\frac{q}{2}\right)(\sqrt{3} - i) & \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right)(\sqrt{3} + i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} = 0 \quad (2.135)$$

これが自明でない解を持つためには、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{q_0}{2}\right) & \cosh\left(\frac{q}{2}\right) & \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right) \\ -q_0 \sin\left(\frac{q_0}{2}\right) & q \sinh\left(\frac{q}{2}\right) & q^* \sinh\left(\frac{q^*}{2}\right) \\ 0 & \cosh\left(\frac{q}{2}\right)(\sqrt{3} - i) & \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right)(\sqrt{3} + i) \end{vmatrix} \\ &= \cos\left(\frac{q_0}{2}\right) \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \cosh\left(\frac{q^*}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -q_0 \tan\left(\frac{q_0}{2}\right) & q \tanh\left(\frac{q}{2}\right) & q^* \tanh\left(\frac{q^*}{2}\right) \\ 0 & \sqrt{3} - i & \sqrt{3} + i \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.136)$$

これを解いて整理すると、

$$0 = -2q_0 \tan\left(\frac{q_0}{2}\right) + (\sqrt{3}i - 1)q \tanh\left(\frac{q}{2}\right) - (\sqrt{3}i + 1)q^* \tanh\left(\frac{q^*}{2}\right) \quad (2.137)$$

あるいは

$$-q_0 \tan\left(\frac{q_0}{2}\right) = \frac{(q_1 + q_2 \sqrt{3}) \sinh(q_1) + (q_1 \sqrt{3} - q_2) \sin(q_2)}{\cosh(q_1) + \cos(q_2)} \quad (2.138)$$

を得る。式 (2.138) によって、 K と τ ($= \sqrt[3]{Ra/K^4}$) が結ばれている。この式の解を数値的に求めると、 Ra が最小となるのは $K = 3.117$ のときで、このとき $Ra = 1707.762$ となる。

なお、 $W(z)$ が奇関数となるとき解を求めてみると、このとき $W(z)$ は

$$W(z) = a_0 \sin(q_0 z) + a_1 \sinh(qz) + a_1^* \sinh(q^* z) \quad (2.139)$$

とおける。先と同様にしてやると、 q_0 、 q_1 、 q_1^* に関して、

$$q_0 \cot\left(\frac{q_0}{2}\right) = \frac{(q_1 + q_2 \sqrt{3}) \sinh(q_1) - (q_1 \sqrt{3} - q_2) \sin(q_2)}{\cosh(q_1) - \cos(q_2)} \quad (2.140)$$

が成り立つ。 Ra が最小となるのは $K = 5.365$ のときで、このとき $Ra = 17610.39$ となる。

2.1.3 上下の境界面の一方が自由すべり面、もう一方が固着面のとき

このときの解は、両端が剛体面のときの解のうち、奇関数の解から得られる (これは $z = 0$ での境界条件を満たしていることに注意)。この解を適用するには、箱の深さが $\frac{1}{2}$ になったとみなせばよいので、 Ra が最小となるのは $K = 5.365/2 = 2.683$ のときで、このとき $Ra = 17610.39/2^4 = 1100.65$ となる。

2.1.4 まとめ

図 4 に擾乱の水平方向波数 K に対する Ra_c の変化を示す。

A マントル対流に必要な熱力学

A.1 熱力学の基礎の復習

以下では、物質の出入りのない (閉じた) 系での熱力学の第 1 法則及び第 2 法則を利用して、マントル対流を記述する際に必要な様々な熱力学的関係式を導出する。より厳密な証明は、手近な熱力学の教科書を参照されたい。

A.1.1 熱力学の第 1 法則

単位質量あたりの内部エネルギーの変化量 δe は、系に加えられた熱量 δq と系がした仕事 δw の差に等しい。

$$\delta e = \delta q - \delta w$$

また可逆過程であれば、

$$\delta w = p \delta V$$

ここで、 $V = 1/\rho$ は比体積 (単位質量あたりの体積) である。

A.1.2 熱力学の第 2 法則

可逆過程であれば

$$\delta q = T \delta s$$

が成り立つ。

A.1.3 熱力学関数

基本となる内部エネルギー e に加えて、種々の熱力学関数が定義される。これらは自然な独立変数を Legendre 変換により変更することで得られる。よく用いられるものを表 3 にまとめておく。

表 3: 種々の熱力学関数

名称	定義	自然な独立変数	全微分式
内部エネルギー	e	s, V	$de = T ds - p dV$
エンタルピー	$h = e + pV$	s, p	$dh = T ds + V dp$
Helmholz の自由エネルギー	$f = e - Ts$	T, V	$df = -s dT - p dV$
Gibbs の自由エネルギー	$g = f + pV$	T, p	$dg = -s dT + V dp$

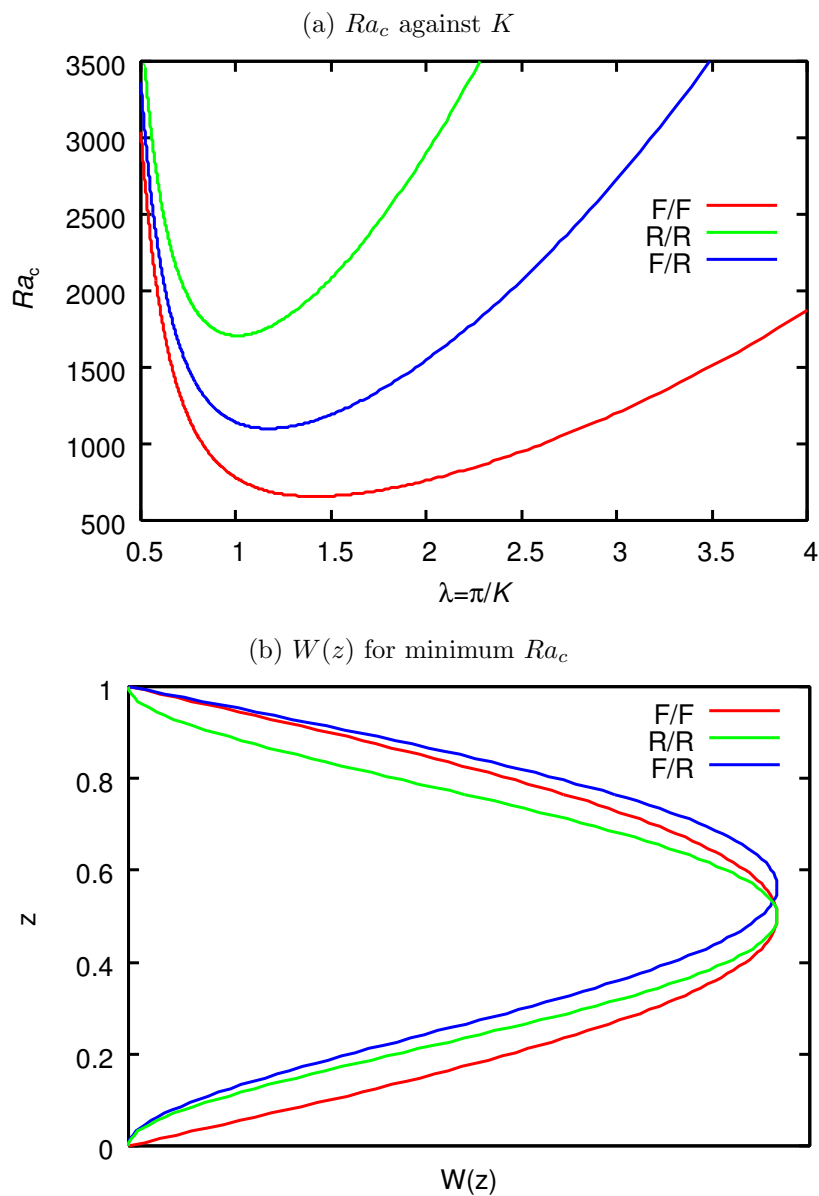


図 4: (a) 擾乱の水平方向波数 K に対する Ra_c の依存性、(b) Ra_c が最小となるときの $W(z)$ の関数形。図中、“F/F” は上下の境界がいずれも自由すべり面の場合、“R/R” は上下の境界がいずれも固着面の場合、“F/R” は一方が自由すべり面でもう一方が固着面の場合を示す。ただし (a) の横軸は π/K で与えられる対流セルのアスペクト比でとっている。また (b) のグラフにおいて、 $W(z)$ は最大が 1 になるように規格化して示している。

A.1.4 熱力学関数の1次偏微分係数

表3の熱力学関数の全微分式より、

$$\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_s = -p \quad (\text{A.1})$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = V \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V = -s, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T = -p \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = V \quad (\text{A.4})$$

A.1.5 相反定理 (Maxwell の関係式)

熱力学関数をその自然な独立変数で1階ずつ微分をとった2階の偏微分係数が、微分をとった順序によらないことを利用する。例えば

$$\left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_V\right]_s = \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_s\right]_V$$

と式 (A.1) から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_V \quad (\text{A.5})$$

が得られる。同様の手続きにより、式 (A.2)、(A.3)、式 (A.4) から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \quad (\text{A.6})$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (\text{A.7})$$

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (\text{A.8})$$

が得られる。

A.1.6 独立変数の取り換え

独立変数の変更をすることによって、種々の偏微分係数の間の関係が導かれる。

3個の変数 x, y, z が1つの関数関係にあるとすると、

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

となる。ここで $dz = 0$ 、即ち z が一定であるとして、 dx と dy の比をとってやることで、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x / \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad (\text{A.9})$$

が得られる。あるいは記憶しやすい形として、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

A.1.7 熱力学的な諸量の定義

熱膨張率 α は式 (1.14) で、等温圧縮率 χ_T は式 (1.15) で既に定義されている。

定積比熱 C_v

$$C_v \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V \quad (\text{A.10})$$

定圧比熱 C_p

$$C_p \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.11})$$

断熱圧縮率 χ_s

$$\chi_s \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (\text{A.12})$$

これらは、熱力学関数の 2 次の微分量に相当している。

なお 2 つの比熱の間には

$$\frac{\chi_T}{\chi_s} = \frac{C_p}{C_v} \quad (\text{A.13})$$

$$C_p = C_v + \frac{\alpha^2 TV}{\chi_T} \quad (\text{A.14})$$

という関係がある。これらは以下のように証明できる。式 (A.12) に (A.9) を適用すると、

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = +\frac{1}{V} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V / \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p$$

ここで $s = s(T, V) = s(T(p, V), V)$ とみなしてやると

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{C_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V$$

同様に $s = s(T, p) = s(T(p, V), p)$ とみなしてやると

$$\left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p$$

これらより、

$$\chi_s = \frac{C_v}{C_p} \frac{1}{V} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V / \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{C_v}{C_p} \left[-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] = \frac{C_v}{C_p} \chi_T$$

のように、比熱の比に関する関係式 (A.13) を得る。ただし再び式 (A.9) を用いた。式 (1.33) の Grüneisen parameter γ を使うと、この関係式は

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \alpha \gamma T \quad (\text{A.15})$$

とも書くことができる。また、比熱の差については

$$C_p - C_v = T \left[\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p - \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V \right]$$

先と同様に $s = s(T, V) = s(T, V(T, p))$ とみなすと

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

ただし (A.7) を用いた。さらに式 (A.9) を用いると

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p - \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left[-\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p / \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] = \frac{\alpha^2 V}{\chi_T}$$

これを代入すると式 (A.14) を得る。

A.2 熱エネルギー保存則への適用

まず式 (1.21) を導いてみる。比エントロピー s の変化を、温度 T と圧力 p の 2 つを独立変数として表わすと、

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp$$

ここで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p &= \frac{1}{T} C_p \quad (\leftarrow (A.11)) \\ \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T &= - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (\leftarrow (A.8)) \\ &= -\alpha V = -\frac{\alpha}{\rho} \quad (\leftarrow (1.14)) \end{aligned}$$

であるから結局式 (1.21) が得られる。

次に、断熱的な圧力変化に伴う温度変化を考えてみる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T / \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (\leftarrow (A.9)) \\ &= \frac{\alpha T}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (A.16)$$

これを使って式 (1.21) を書き直すと

$$ds = \frac{C_p}{T} \left[dT - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_T dp \right] \quad (A.17)$$

が得られる。式 (A.17) より、式 (1.21) の第 2 項は、断熱的な圧力変化 (圧縮あるいは膨張) による温度変化を表わしていることが理解できよう。

式 (A.16) に加えて静水圧平衡条件

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \quad (A.18)$$

を仮定すると、断熱温度勾配 (adiabatic temperature gradient)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \frac{\alpha T}{\rho C_p} = \frac{\alpha T g_i}{C_p} \quad (A.19)$$

を得る。

一方、比エントロピー s の変化を、温度 T と比体積 V の 2 つを独立変数として表わしてみると、

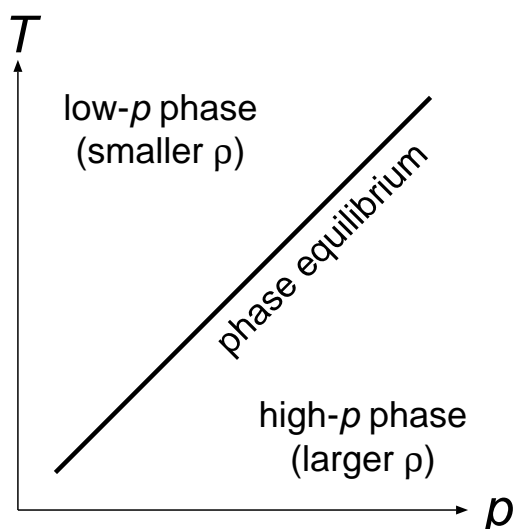
$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T dV$$

ここで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V &= \frac{C_v}{T} \quad (\leftarrow (A.10)) \\ \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (\leftarrow (A.7)) \\ &= - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p / \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (\leftarrow (A.9)) \\ &= \frac{\alpha}{\chi T} \quad (\leftarrow (1.14), (1.15)) \end{aligned} \quad (A.21)$$

であるから、

$$ds = \frac{C_v}{T} dT + \frac{\alpha}{\chi T} dV = \frac{C_v}{T} dT - \frac{\alpha}{\chi T \rho^2} d\rho \quad (A.22)$$



が得られる。非圧縮 ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$) の場合には、この表式を使うと式 (1.16) が簡潔に書き下せる。さらに式 (1.33) の Grüneisen parameter γ を使って式 (A.22) を書き直すと

$$ds = C_v \left[\frac{dT}{T} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right] = C_v d [\ln(T\rho^{-\gamma})] \quad (\text{A.23})$$

となる。

A.3 相転移の熱力学

この章を書くにあたって、[15, 12] を参考にした。

A.3.1 1成分系の相転移の熱力学

以下では簡単のため、1次の相転移 (first order phase transition) のみを取り扱う。1次の相転移とは、熱力学関数の1次微分量 (A.1.4章を見よ) が相転移の際に不連続に変化するものをいう。相転移の際に原子の再配列が起こるような大きな構造変化を伴う固体-固体相転移や、融解、蒸発などは1次の相転移の例である。これに対し、2次の相転移 (second order phase transition) とは熱力学関数の1次微分量は連続だが、2次微分量 (A.1.7章を見よ) が相転移の際に不連続に変化するものをいう。

低圧相、高圧相における Gibbs の自由エネルギー (単位量あたりの化学ポテンシャル) をそれぞれ g_ℓ 、 g_h と書く。相転移は Gibbs の自由エネルギーが両者で等しくなったとき、即ち

$$g_\ell = g_h$$

のときに起こる。相転移において体積は不連続に変化し、高圧相への転移によって体積は常に減少する (Le Chatelier の原理)。エントロピーも不連続に変化するが、体積変化とは異なり、相転移によってエントロピーは増加することも減少することもある。固体相転移の場合、エントロピーに最も大きな影響を与えるのは原子の格子振動であり、格子振動の周波数が高いほどエントロピーは小さい。通常は高圧相のほうが化学結合が強く、そのため格子振動の周波数も高くなるため、高圧相のほうがエントロピーが小さい。しかし相転移によって原子の配位数 (ある原子と近接している他の原子の数) が大きく変化する場合には例外的に高圧相のほうがエントロピーが大きくなる場合もある。

2相の共存線の具体的な関数形を与えるには、各々の相の Gibbs の自由エネルギーの表式を知る必要がある。ここでは単に、相境界の温度-圧力変化のみを考えることにする。異なる2つの相が平衡にあるとき、

その 2 相の共存線に沿って

$$dg_\ell = dg_h$$

が当然成り立つ。Gibbs の自由エネルギーで自然な独立変数である温度 T 、圧力 p (表 3 を見よ) を用いてこの条件を書き直すと、

$$\left(\frac{\partial g_\ell}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial g_\ell}{\partial p}\right)_T dp = \left(\frac{\partial g_h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial g_h}{\partial p}\right)_T dp$$

式 (A.4) を用いれば、

$$-s_\ell dT + V_\ell dp = -s_h dT + V_h dp \Rightarrow (V_\ell - V_h) dp = (s_\ell - s_h) dT$$

ここで、 s は比エントロピー、 V は比体積である。これより 2 相の共存線の傾きは

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_\ell - s_h}{V_\ell - V_h} = \frac{q}{T\Delta V} \quad (\text{A.24})$$

となる。これを Clausius-Clapeyron の式という。ここで、 $q \equiv T(s_\ell - s_h)$ は相転移の際の潜熱、 $\Delta V \equiv V_\ell - V_h$ は相転移の際の体積変化を表わす。マンテル対流業界では式 (A.24) で表わされる量を γ と書き、Clapeyron slope と呼ぶことが多い。

B 非デカルト座標系でのマンテル対流の基礎方程式系

以下では簡単のため、Boussinesq 近似のもとでの基礎方程式を導出する。

B.1 一般座標系でのマンテル対流の方程式系

解くべき方程式を

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}T - \kappa \nabla T) \quad (\text{B.25})$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla + \mathbf{b} \quad (\text{B.27})$$

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) \quad (\text{B.29})$$

とする。ここで \mathbf{I} は単位テンソルである。また上記から明らかなように、応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ は対称テンソルであり、 $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ である。以下、ベクトルやテンソルは極力反変成分を使って書くことにする。

まず質量保存の式 (B.26) を書き直す。一般座標系では

$$\nabla = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \\ \frac{\partial}{\partial x^m} g^{ml} \mathbf{g}_l \end{array} \right. \quad (\text{B.30})$$

となることを使うと、

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \right) \cdot (v^k \mathbf{g}_k) = \mathbf{g}^m \cdot \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^m} \mathbf{g}_k + v^k \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^m} \right) \\ &= \mathbf{g}^m \cdot \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^m} \mathbf{g}_k + v^k \Gamma_{km}^l \mathbf{g}_l \right) = \frac{\partial v^k}{\partial x^m} (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_k) + v^k \Gamma_{km}^l (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_l) \\ &= \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^k \Gamma_{km}^m \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

となる。この手順は要するに、ベクトルの反変成分の共変導関数を求める手順と同じである。

熱輸送方程式 (B.25) も同様にできる。簡単のために熱流束ベクトル

$$\mathbf{f} \equiv vT - \kappa \nabla T = v^l T \mathbf{g}_l - \kappa g^{ml} \frac{\partial T}{\partial x^m} \mathbf{g}_l = \left(v^i T - \kappa g^{mi} \frac{\partial T}{\partial x^m} \right) \mathbf{g}_i \equiv f^i \mathbf{g}_i \quad (\text{B.32})$$

を定義しておけば、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^k} + f^k \Gamma_{km}^m \right) \quad (\text{B.33})$$

とするだけでよい。

次に運動量保存の式 (B.27) を考える。そのうち応力テンソルの発散をどう書けばよいかを考えてみる。応力テンソルを反変成分で書いてみて、その発散をとると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla &= (\tau^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \right) \\ &= \left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \tau^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^m} \otimes \mathbf{g}_j + \tau^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^m} \right) \cdot \mathbf{g}^m \\ &= \left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \tau^{ij} \Gamma_{im}^l \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_j + \tau^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \Gamma_{jm}^l \mathbf{g}_l \right) \cdot \mathbf{g}^m \\ &= \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^m} \delta_j^m \mathbf{g}_i + \tau^{ij} \Gamma_{im}^l \delta_j^m \mathbf{g}_l + \tau^{ij} \mathbf{g}_i \Gamma_{jm}^l \delta_l^m \\ &= \left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \tau^{kj} \Gamma_{kj}^i + \tau^{ij} \Gamma_{jk}^k \right) \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

となる。これも実は 2 階のテンソルの反変成分の共変導関数を求める手順と同じ。これを代入すれば結局

$$\left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \tau^{kj} \Gamma_{kj}^i + \tau^{ij} \Gamma_{jk}^k \right) \mathbf{g}_i + \mathbf{b} = 0 \quad (\text{B.35})$$

を得る。

最後に構成方程式 (B.28) と (B.29) を考える。まず、応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ の反変成分を書き下すと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -p \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{D} = -p g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + 2\eta D^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\ &= (-g^{ij} p + 2\eta D^{ij}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \equiv \tau^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

である。次に歪速度テンソル (変形速度テンソル) \mathbf{D} の反変成分の表現を作ってみると、

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D} &= \nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \right) \otimes (v^i \mathbf{g}_i) + (v^i \mathbf{g}_i) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \right) \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_i + v^i \mathbf{g}^m \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^m} + \frac{\partial v^i}{\partial x^m} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^m + v^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^m} \otimes \mathbf{g}^m \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_i + v^i \mathbf{g}^m \otimes \Gamma_{im}^l \mathbf{g}_l + \frac{\partial v^i}{\partial x^m} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^m + v^i \Gamma_{im}^l \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_i + \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^m \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) (g^{ml} \mathbf{g}_l) \otimes \mathbf{g}_i + \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) \mathbf{g}_i \otimes (g^{ml} \mathbf{g}_l) \\ &= \left[g^{mi} \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^j \right) + g^{mj} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \equiv 2D^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

を得る。上式の () 内はベクトル \mathbf{v} の反変成分の共変導関数であり、反変 1 階、共変 1 階の混合成分である。それらと計量テンソルの反変成分との縮約をとることにより、2 階のテンソル \mathbf{D} の反変成分を求めることができる。

見た目はややこしいが、これで一般座標系での基礎方程式が書けたことになる。

B.2 (正規) 直交曲線座標系でのマントル対流の方程式系

先に求めた一般座標系での表式に、正規直交曲線座標系の条件を加えて、式を簡略化する。共変基底ベクトル g_i から正規化された局所直交基底 a_i を

$$a_i \equiv \frac{1}{h_i} g_i = h_i g^i \quad (\text{B.38})$$

と定義する。ここで $h_i \equiv \sqrt{|g_i|^2}$ は共変基底ベクトル g_i の長さである。さらに、基底 a_i を用いて表示したベクトルやテンソルの成分を \hat{v}_i の如く、 $\hat{\cdot}$ で表わすことにすると、これらと (一般座標系で書いた) 反変成分との関係は

$$v^i = v \cdot g^i = (\hat{v}_j a_j) \cdot g^i = \left(\hat{v}_j \frac{1}{h_j} g_j \right) \cdot g^i = \frac{\hat{v}_j}{h_j} \delta_j^i = \frac{\hat{v}_i}{h_i} \quad (\text{B.39})$$

$$D^{ij} = g^i \cdot D \cdot g^j = g^i \cdot \left(\hat{D}_{kl} a_k \otimes a_l \right) \cdot g^j = g^i \cdot \left(\hat{D}_{kl} \frac{1}{h_k h_l} g_k \otimes g_l \right) \cdot g^j = \frac{\hat{D}_{kl}}{h_k h_l} \delta_k^i \delta_l^j = \frac{\hat{D}_{ij}}{h_i h_j} \quad (\text{B.40})$$

と与えられる。即ち、正規化された局所直交基底での式を書き下す場合には、Christoffel 記号 Γ_{ij}^n の書き直しに加え、ベクトルやテンソルの成分の表式も書き直す必要がある。

まず質量保存の式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^k \Gamma_{km}^m = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\hat{v}_k}{h_k} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \left(\frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial x^k} \delta_{mm} + \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial x^m} \delta_{km} - \frac{h_k}{h_m^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^m} \delta_{km} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\hat{v}_k}{h_k} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\hat{v}_k}{h_k} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial h_1 h_2 h_3}{\partial x^k} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{\hat{v}_k}{h_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

となる。これはよくある、正規直交曲線座標系でのベクトル場の発散の式と同じ。

熱輸送方程式については、熱流束ベクトル f の a_i による成分を

$$\hat{f}_i = h_i f^i = h_i \left(\frac{\hat{v}_i}{h_i} T - \kappa \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) = \hat{v}_i T - \kappa \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial x^i} \quad (\text{B.42})$$

と定義しておけば

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^k} + f^k \Gamma_{km}^m \right) = - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{\hat{f}_k}{h_k} \right) \quad (\text{B.43})$$

と与えられる。

次に構成方程式のうち、応力テンソル τ の基底 a_i による表現は

$$\hat{\tau}_{ij} = h_i h_j \tau^{ij} = h_i h_j \left(- \frac{1}{h_i h_j} \delta_{ij} p + 2\eta \frac{\hat{D}_{ij}}{h_i h_j} \right) = -p \delta_{ij} + 2\eta \hat{D}_{ij} \quad (\text{B.44})$$

である。次に歪速度テンソル (変形速度テンソル) D の表現は

$$\begin{aligned}
2\hat{D}_{ij} &= h_i h_j 2D^{ij} = h_i h_j \left[g^{mi} \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^j \right) + g^{mj} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^k \Gamma_{km}^i \right) \right] \\
&= \frac{h_j}{h_i} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{v}_j}{h_j} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \delta_{kj} + \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^k} \delta_{ij} - \frac{h_i}{h_j^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \delta_{ik} \right) \right] \\
&+ \frac{h_i}{h_j} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{v}_i}{h_i} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \delta_{ji} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \delta_{ki} - \frac{h_k}{h_i^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^i} \delta_{kj} \right) \right] \\
&= \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{v}_j}{h_j} \right) + \frac{1}{h_i} \frac{\hat{v}_j}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} + \frac{1}{h_i} \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial x^k} \delta_{ij} - \frac{1}{h_j} \frac{\hat{v}_i}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \\
&+ \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{v}_i}{h_i} \right) + \frac{1}{h_j} \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \delta_{ij} + \frac{1}{h_j} \frac{\hat{v}_i}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} - \frac{1}{h_i} \frac{\hat{v}_j}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \\
&= \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{v}_j}{h_j} \right) + \frac{1}{h_i} \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial x^k} \delta_{ij} + \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{v}_i}{h_i} \right) + \frac{1}{h_j} \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \delta_{ij} \\
&= \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\hat{v}_j}{h_j} \right) + \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{v}_i}{h_i} \right) + \frac{\hat{v}_k}{h_k} \frac{2}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{B.45}$$

最後に運動量保存の式を基底 \mathbf{a}_i で書き直すと、

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \tau^{kj} \Gamma_{kj}^i + \tau^{ij} \Gamma_{jk}^k \right) \mathbf{g}_i + \mathbf{b} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \right) + \frac{\hat{\tau}_{kj}}{h_k h_j} \Gamma_{kj}^i + \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \Gamma_{jk}^k \right] h_i \mathbf{a}_i + \hat{b}_i \mathbf{a}_i
\end{aligned} \tag{B.46}$$

となる。これより i 方向の運動量保存の式は

$$\begin{aligned}
-\hat{b}_i &= h_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \right) + h_i \frac{\hat{\tau}_{kj}}{h_k h_j} \Gamma_{kj}^i + h_i \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \Gamma_{jk}^k \\
&= h_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \right) + h_i \frac{\hat{\tau}_{kj}}{h_k h_j} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \delta_{ji} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \delta_{ki} - \frac{h_k}{h_i^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^i} \delta_{kj} \right) \\
&+ h_i \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \left(\frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x^j} \delta_{kk} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x^k} \delta_{jk} - \frac{h_k}{h_k^2} \frac{\partial h_k}{\partial x^k} \delta_{kj} \right) \\
&= h_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \right) + \frac{\hat{\tau}_{ji}}{h_j h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} + \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} - \frac{\hat{\tau}_{jj}}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} + \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_j} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x^j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_j} \right) - \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} + \frac{\hat{\tau}_{ji}}{h_j h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} + \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_j} \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x^j} \right] - \frac{\hat{\tau}_{jj}}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_j} \right) + \frac{\hat{\tau}_{ij}}{h_j} \frac{1}{h_i h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_i h_1 h_2 h_3)}{\partial x^j} - \frac{\hat{\tau}_{jj}}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{h_i h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{h_i}{h_j} \hat{\tau}_{ij} \right) - \frac{\hat{\tau}_{jj}}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

ただし、応力テンソル τ の対称性 ($\hat{\tau}_{ij} = \hat{\tau}_{ji}$) を用いた。よって、

$$\frac{1}{h_i h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{h_i}{h_j} \hat{\tau}_{ij} \right) - \frac{\hat{\tau}_{jj}}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} + \hat{b}_i = 0 \tag{B.47}$$

B.2.1 てっとり早く知りたい方のためのまとめ

3次元球座標系の場合の基礎方程式系 $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$ とする。この場合 $h^1 = 1$, $h^2 = r$, $h^3 = r \sin \theta$ となるので、これを代入して整理すると以下ようになる。

- 熱輸送方程式系

$$\begin{aligned}
 f_r &= v_r T - \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \\
 f_\theta &= v_\theta T - \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\
 f_\phi &= v_\phi T - \kappa \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta f_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta f_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r f_\phi) \right]
 \end{aligned}$$

- 質量保存則

$$0 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r v_\phi) \right]$$

- 歪速度テンソルの定義

$$\begin{aligned}
 D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right] \\
 D_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \sin \theta v_r + \cos \theta v_\theta \right] \\
 D_{r\theta} = D_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\
 D_{r\phi} = D_{\phi r} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \\
 D_{\theta\phi} = D_{\phi\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]
 \end{aligned}$$

- 偏差応力テンソルの定義

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= 2\eta \left[D_{rr} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{\phi\phi}) \right] \\
 \tau_{\theta\theta} &= 2\eta \left[D_{\theta\theta} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{\phi\phi}) \right] \\
 \tau_{\phi\phi} &= 2\eta \left[D_{\phi\phi} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{\phi\phi}) \right] \\
 \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= 2\eta D_{r\theta} \\
 \tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} &= 2\eta D_{r\phi} \\
 \tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= 2\eta D_{\theta\phi}
 \end{aligned}$$

- r 方向の運動方程式

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} + b_r = 0$$

- θ 方向の運動方程式

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} - \frac{\cot \theta \tau_{\phi\phi}}{r} + b_\theta = 0$$

- ϕ 方向の運動方程式

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\phi r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\phi\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\phi r}}{r} + \frac{\cot \theta \tau_{\phi\theta}}{r} + b_\phi = 0$$

3次元円筒座標系の場合の基礎方程式系 $x^1 = r$ 、 $x^2 = \theta$ 、 $x^3 = z$ とする。この場合 $h^1 = 1$ 、 $h^2 = r$ 、 $h^3 = 1$ となるので、これを代入して整理すると以下ようになる。

- 熱輸送方程式系

$$\begin{aligned} f_r &= v_r T - \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \\ f_\theta &= v_\theta T - \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ f_z &= v_z T - \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{aligned}$$

- 質量保存則

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- 歪速度テンソルの定義

$$\begin{aligned} D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right] \\ D_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ D_{r\theta} &= D_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ D_{rz} &= D_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ D_{\theta z} &= D_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

- 偏差応力テンソルの定義

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta \left[D_{rr} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz}) \right] \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\eta \left[D_{\theta\theta} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz}) \right] \\ \tau_{zz} &= 2\eta \left[D_{zz} - \frac{1}{3} (D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz}) \right] \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = 2\eta D_{r\theta} \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = 2\eta D_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = 2\eta D_{\theta z} \end{aligned}$$

- r 方向の運動方程式

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0$$

- θ 方向の運動方程式

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + b_\theta = 0$$

- z 方向の運動方程式

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

C 高温高压下での物質の弾性的・熱的性質

以下の記述は [11] を参考にした。

C.1 Birch-Murnaghan の状態方程式

高压の地球惑星内部では、物質は大きな静水圧縮を受ける。その場合にはもはや無限小歪の取り扱いでは用をなさず、有限歪の取り扱いが必要となる。Birch-Murnaghan の状態方程式とは、Murnaghan の一般的な有限歪弾性論を援用して、Birch が導いたものである。以下では、オイラー流の記述を用いた導出を行う。

変形前 (圧力 0) の状態での任意の微小ベクトル dX が静水圧による等方的な変形を受けて dx になるとすると、これらの間には

$$dx = (1 + \alpha)dX \quad (\text{C.48})$$

なる関係がある。ここで α は定数で、圧縮のとき $\alpha < 0$ である。これよりオイラー歪 (Almansi の歪テンソル) A は

$$dx \cdot dx^* - dX \cdot dX^* = \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \right] dx \cdot dx^* = dx \cdot 2A \cdot dx^*$$

となって、有限等方歪 e は

$$e = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \right] \quad (\text{C.49})$$

と書ける。この定義では e は圧縮のときに負となり、高压下での圧縮を論ずる際には少々不便である。そこで e と符号を反転させた $f \equiv -e$ を以下の議論では用いることにする。

まず、有限変形に伴う密度変化を求めよう。変形前 (圧力 0) の体積素片の体積を dV_0 、密度を ρ_0 とし、圧力下でこれらが各々 dV 、 ρ になったとすると、変形の等方性 (式 (C.48)) から

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{dV_0}{dV} = \frac{1}{(1 + \alpha)^3} = (1 - 2e)^{\frac{3}{2}} = (1 + 2f)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.50})$$

あるいは

$$f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \quad (\text{C.51})$$

なる関係を得る。

高压下で有効な状態方程式を導くために、熱力学的な考察を加える。体積を V 、圧力を p 、温度を T 、エントロピーを S 、内部エネルギーを U 、Helmholtz の自由エネルギーを F とすると、

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (\text{C.52})$$

なる関係がある (A.1.4 章を参照せよ)。静水圧下の圧縮では、 U 及び F はそれぞれ断熱的、等温的に蓄えられた歪エネルギーに相当すると考えられる。

歪エネルギー W (U または F) を歪 f のべき級数で表わそう。 $f = 0$ で $W = 0$ 及び $p = 0$ であることを考えると、このべき級数は

$$W = af^2 + bf^3 + \dots \quad (\text{C.53})$$

の如く、 f の 0 次及び 1 次の項は含まれないことが分かる。式 (C.53) を式 (C.52) に代入し、式 (C.50) を考慮すると、圧力 p と歪 f の関係は

$$p = - \frac{\partial W}{\partial V} = - \frac{\partial W}{\partial f} \frac{df}{dV} = \frac{1}{3V_0} (1 + 2f)^{\frac{5}{2}} (2af + 3bf^2 + \dots) \quad (\text{C.54})$$

と書ける。

式 (C.54) に含まれる係数 a 、 b を、物理的に明確な意味を持つ量で書き換えてみよう。式 (C.54) から、体積弾性率 (体積圧縮率の逆数、A.1.7 章を参照せよ) K は

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{2}{9V_0} (1+2f)^{\frac{5}{2}} [a + (7a+3b)f + \dots] \quad (\text{C.55})$$

と書ける。特に $f = 0$ ($p = 0$ に相当) の場合を考えると、

$$K_0 = \frac{2}{9V_0} a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{2} K_0 V_0 \quad (\text{C.56})$$

を得る。ここで K_0 は $p = 0$ での体積弾性率である。同様に、体積弾性率の圧力勾配 $K' = dK/dp$ について、

$$\frac{\partial K}{\partial f} = K' \frac{dp}{df}$$

の両辺を計算すると、

$$\frac{2}{9V_0} (1+2f)^{\frac{3}{2}} [3(4a+b) + (49a+21b)f + \dots] = K' \frac{1}{3V_0} (1+2f)^{\frac{3}{2}} [2a + (14a+6b)f + 27bf^2 + \dots]$$

特に $f = 0$ の場合には

$$\frac{2}{3V_0} (4a+b) = K'_0 \frac{2}{3V_0} a \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = K'_0 - 4 \quad (\text{C.57})$$

を得る。ここで K'_0 は $p = 0$ での体積弾性率の圧力微分値である。これらを式 (C.54) に代入してやると、

$$\begin{aligned} p &= 3K_0 (1+2f)^{\frac{5}{2}} f \left[1 + \frac{3}{2} (K'_0 - 4) f + \dots \right] \\ &= \frac{3}{2} K_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \left\{ 1 + \frac{3}{4} (K'_0 - 4) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

を得る。式 (C.58) を Birch-Murnaghan の状態方程式と呼ぶ。 K 及び K' に断熱条件での値を用いれば、断熱圧縮における圧力 p と密度 ρ の関係式を与える。また等温条件でのそれを用いれば、等温圧縮における p と ρ の関係式を与える。

C.2 Mie-Grüneisen の状態方程式

先に議論した Birch-Murnaghan の状態方程式では、温度が上がる効果は含まれていなかった。ここでは、温度が上がる効果を含めた状態方程式を検討する。

温度が上がるにつれて、物質中には格子の熱振動のモードがエネルギーの低いものから励起され、内部エネルギーが上がる。 N 個の原子からなる系を考えれば、各原子は 3 方向の運動の自由度をもつから、系の自由度は $3N$ である²。これは $3N$ 個の振動子 (フォノン) の集まりと考えられる。系の高温での性質を知るには、この $3N$ の振動子がどのようなエネルギー分布、つまり振動数の分布を持つかが問題となる。

量子力学及び統計力学によれば、振動数 ν の振動子のとり得るエネルギー準位は $n h \nu$ (ただし $n = 0, 1, 2, \dots$) であり、各準位をとる確率は $\exp(-n h \nu / k T)$ である。ここで h はプランク定数、 k はボルツマン定数である。従って、1 つの振動子の平均エネルギー u は

$$u = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu \exp\left(-\frac{n h \nu}{k T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n h \nu}{k T}\right)} = \frac{h \nu \exp\left(-\frac{h \nu}{k T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h \nu}{k T}\right)} \quad (\text{C.59})$$

²より厳密には系全体の自由度に相当する 6 を引くべきであろうが、 $N \gg 1$ から $3N - 6 \simeq 3N$ とした。

となる。ここで、第2式から第3式への変形には、分母が初項1、公比 $\exp(-\frac{h\nu}{kT})$ の無限等比級数であること、及び分子はそれを $1/kT$ で微分したものであることを用いた。系全体の内部エネルギー U は、式 (C.59) の $3N$ 個の振動子について和をとったものになるから、

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{3N} \frac{h\nu_i \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)} \quad (\text{C.60})$$

ここで i は振動子の番号、 U_0 は $T = 0\text{K}$ での内部エネルギーである。 U の具体的な表式を定めるには、 $3N$ 個の振動子の振動数 ν_i の分布を決める必要がある。

これを基にして状態方程式を導くために、熱力学的な考察を加える。内部エネルギー U と Helmholtz の自由エネルギー F の間には

$$U = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

なる関係がある (A 章を参照のこと)。これより、

$$\begin{aligned} F &= -T \int \frac{U}{T^2} dT = -T \int \left[\frac{U_0}{T^2} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{h\nu_i \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)}{T^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)\right)} \right] dT \\ &= U_0 + \sum_{i=1}^{3N} kT \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

の如く F の表式を得る。式 (C.52) に代入して圧力 p を求めると、

$$\begin{aligned} p &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{dU_0}{dV} - \sum_{i=1}^{3N} \frac{h \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)} \frac{d\nu_i}{dV} \\ &= - \frac{dU_0}{dV} - \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{3N} \frac{h\nu_i \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{kT}\right)} \frac{d \ln \nu_i}{d \ln V} \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

を得る。ただし U_0 と ν_i は体積 V だけの関数と仮定した。式 (C.62) で、振動子の振動数が体積によって変化する割合を表わすパラメータ

$$\gamma_i = - \frac{V d\nu_i}{\nu_i dV} = - \frac{d \ln \nu_i}{d \ln V} \quad (\text{C.63})$$

がどの振動子 i についても γ_G で一定であると仮定すると、式 (C.62) は

$$p = - \frac{dU_0}{dV} + \gamma_G \frac{U}{V} \quad (\text{C.64})$$

と簡略化される。この式は Mie-Grüneisen の状態方程式と呼ばれる。ここで式 (C.64) の右辺第1項 $-dU_0/dV = p_0$ は $T = 0\text{K}$ での圧力を表わし、第2項 $\gamma_G U/V$ は温度上昇に起因する熱振動による圧力で、熱圧力とも呼ばれる。

なお、式 (C.63) から定義される γ_G は Grüneisen parameter と呼ばれる。これは振動子の振動数が体積変化によって変化する割合を表わしており、高温下における物質の性質を論じる際に重要な量である。式 (C.64) を体積一定のもとに温度で微分すると、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \gamma_G \frac{1}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

これより

$$\gamma_G = \frac{V \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V} = \frac{V \alpha K_T}{C_V} = \frac{V \alpha K_S}{C_p} \quad (\text{C.65})$$

のように表わされる。ここで α は熱膨張率、 K_T は等温体積弾性率、 K_S は断熱体積弾性率、 C_V は定積石比熱、 C_p は定圧比熱であり、

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

及び $K_T/K_S = C_V/C_p$ の関係式を用いた。式 (C.65) は式 (1.33) と等価であることに注意。即ち、 γ_G はマクローナ観測量で表わしていることになる。実際の鉱物の K_S 、 α 、 C_p 、 V の測定データから γ_G を求めると、その温度依存性は小さく、ある程度以上の高温ではほぼ一定とみなせる。また鉱物種の違いによる γ_G の違いは小さく、およそ 1 から 2 の範囲に収まっている。

C.3 格子の熱振動に関する Debye モデル

振動子の振動数 ν_i がどのような分布をしているかを Debye モデルに従ってモデル化し、式 (C.60) の内部エネルギー U を見積もろう。Debye モデルでは、 N 個の原子からなる $3N$ 個の振動子を連続体の弾性波で置き換える。ただし、振動子の個数が $3N$ 個と有限であることは、弾性波の振動数 ν をある最大値 ν_{\max} で打ち切ることで処理する。

波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ 、振動数 ν で伝わる平面波

$$A \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - 2\pi \nu t)]$$

を考える。この平面波が体積 $V = L^3$ の立方体の中を伝わるとしよう。周期境界条件のもとで存在しうる波は、波数 (k_1, k_2, k_3) が

$$0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \frac{6\pi}{L}, \dots$$

を満たすものに限られる。このことを (k_1, k_2, k_3) を座標とする波数空間で考えると、 $\frac{2\pi}{L}$ 間隔に分布する格子点の各々に対応する波が 1 つ存在することになる。弾性波の速度を v として、振動数 ν 以下のモードの総数 M は、半径 $k = \frac{2\pi\nu}{v}$ の体積に含まれるモードの総数であるから、

$$M = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{4}{3} \pi k^3 = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2\pi\nu}{v} \right)^3 = \frac{4\pi V}{3} \frac{\nu^3}{v^3}$$

と書ける。ここで、単位体積あたりに存在しうる波の個数が $\left(\frac{L}{2\pi} \right)^3$ であることを用いた。上式より、モードの数の分布関数 $D(\nu)$ は

$$D(\nu) = \frac{dM}{d\nu} = 4\pi V \frac{\nu^2}{v^3} \quad (\text{C.66})$$

と与えられる。さらに弾性波には 1 方向につき 1 つの縦波 ($v = v_p$) と 2 つの横波 ($v = v_s$) があることを用いて、式 (C.66) の v をこれらの平均値で置き換え、

$$D(\nu) = \frac{dM}{d\nu} = 4\pi V \nu^2 \left(\frac{1}{v_p^3} + \frac{2}{v_s^3} \right) \quad (\text{C.67})$$

としよう。ところで、全モード数が振動子の数 $3N$ となるようにするには、振動数 ν をある値 ν_{\max} で打ち切らねばならない。式 (C.67) を用いて積分すると

$$3N = \int_0^{\nu_{\max}} D(\nu) d\nu = \frac{4}{3} \pi V \left(\frac{1}{v_p^3} + \frac{2}{v_s^3} \right) \nu_{\max}^3$$

であるから、振動数の最大値 ν_{\max} は

$$\nu_{\max} = \left(\frac{9N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{v_p^3} + \frac{2}{v_s^3} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{C.68})$$

であり、式 (C.67) と (C.68) より

$$D(\nu) = \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \nu^2 \quad (\text{C.69})$$

と与えられる。

モード数の分布が得られたので、式 (C.60) の内部エネルギーを求めよう。式 (C.59) と (C.69) より

$$U = \int_0^{\nu_{\max}} u D(\nu) d\nu = \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu \quad (\text{C.70})$$

であるが、ここで

$$\frac{h\nu}{kT} = \xi, \quad \frac{h\nu_{\max}}{kT} = \frac{\theta_D}{T} = x \quad (\text{C.71})$$

とおけば、

$$U = 9NkT \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi = 3NkT f(x) \quad (\text{C.72})$$

と書ける。ここで

$$f(x) \equiv \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi$$

とおいた。 $f(x)$ は高温 ($1/x = T/\theta_D \rightarrow \infty$) で $f(x) \rightarrow 1$ となり、その結果 $U \rightarrow 3NkT$ である。

式 (C.71) の θ_D は温度の次元をもつ量で、Debye 温度と呼ばれる。式 (C.68) より

$$\theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k} = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{v_p^3} + \frac{2}{v_s^3} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{C.73})$$

と書ける。Debye 温度は、比熱や熱膨張などの熱的測定から得られるほか、弾性波速度 (v_p と v_s) からも得られる。造岩鉱物の Debye 温度はおよそ 800K ~ 1000K 程度の値であり、熱的に求めたものと弾性的に求めたものの両者はおおよそ一致する。

内部エネルギー U の表式が式 (C.70) の通り得られたので、これを温度で微分してやると定積比熱 C_v が求まる。

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 9Nk \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^4 e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} d\xi = 3Nk c(x) \quad (\text{C.74})$$

ここで、

$$c(x) \equiv \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^4 e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} d\xi$$

とおいた。式 (C.74) で $T \rightarrow \infty$ とすると $C_v \rightarrow 3Nk$ となり、古典的な Dulong-Petit の法則と一致する。

D 知っておくと便利な関数

D.1 誤差関数

この記述は [10] を参考にした。

誤差関数 (error function) とは以下で定義される。

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' \quad (\text{D.75})$$

同様に補誤差関数 (complementary error function) とは

$$\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) \quad (\text{D.76})$$

で与えられる。誤差関数はその名や定義式からも想像される通り、正規分布と密接な関係がある。これに加えて以下に示す通り、誤差関数は熱伝導方程式の解を記述する役割もある。この性質から、誤差関数は熱境界層内の温度分布を簡便に計算する際にもよく登場する関数である。

以下では、 $z > 0$ に広がる半無限体を考える。時刻 $t = 0$ では内部の温度 $T = T_1$ であったが、時刻 $t > 0$ では表面 $z = 0$ の温度が $T = T_0$ に瞬間的に変化を加えたとし、その後の内部の温度変化を考える。式で書くと、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{D.77})$$

$$\begin{aligned} T(t = 0, z > 0) &= T_1 \\ T(t > 0, z = 0) &= T_0 \\ T(t > 0, z \rightarrow \infty) &= T_1 \end{aligned} \quad (\text{D.78})$$

である。温度 T をしかるべく無次元化した量として、

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (\text{D.79})$$

を導入する。これを用いて方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{D.80})$$

$$\begin{aligned} \theta(t = 0, z > 0) &= 0 \\ \theta(t > 0, z = 0) &= 1 \\ \theta(t > 0, z \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.81})$$

である。

熱伝導問題の性質を考慮すると、 θ は z と t の2つの変数に依存するというよりはむしろ、以下で定義される η の関数として書くほうが簡単になる。

$$\eta \equiv \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (\text{D.82})$$

これは、時間 t の間に拡散で熱が伝わる距離 $\sqrt{\kappa t}$ と距離 z との比 (の半分) という意味があることに注意。これを用いて式 (D.80) 及び (D.81) を書き直そう。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2t} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{1}{4\kappa t} \end{aligned}$$

であることを用いると、式 (D.80) は

$$-2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (\text{D.83})$$

となり、式 (D.81) は

$$\theta(\eta \rightarrow \infty) = 0, \quad \theta(\eta = 0) = 1 \quad (\text{D.84})$$

と書き直せる。

式 (D.83) を解いてみよう。その際、まず $\phi \equiv \frac{d\theta}{d\eta}$ と置いてやると

$$-2\eta\phi = \frac{d\phi}{d\eta} \Rightarrow -2\eta d\eta = \frac{d\phi}{\phi} \quad (\text{D.85})$$

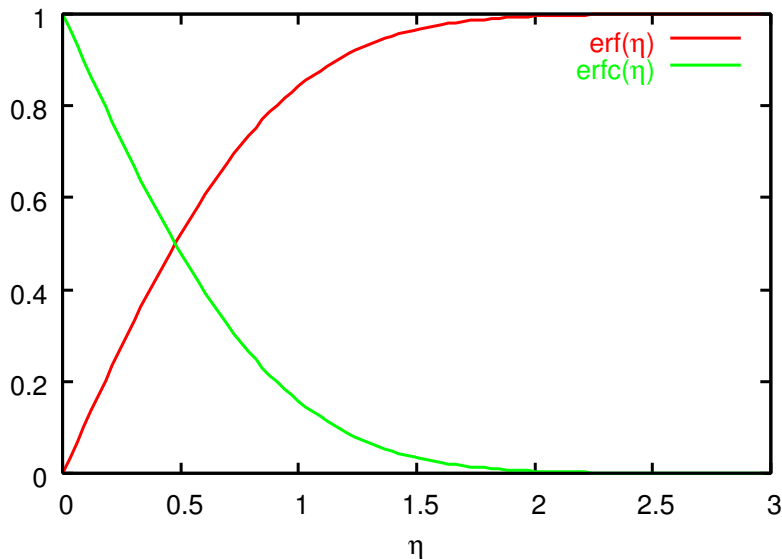


図 5: 誤差関数 $\text{erf}(\eta)$ 及び補誤差関数 $\text{erfc}(\eta)$ のグラフ

これを η で積分して

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad \Rightarrow \quad \phi = c_1 \exp(-\eta^2) = \frac{d\theta}{d\eta} \quad (\text{D.86})$$

を得る。ここで c_1 は積分定数である。これをもう一度 η で積分して

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\eta=0) + c_1 \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' \\ &= c_1 \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' + 1 \end{aligned} \quad (\text{D.87})$$

を得る。積分定数 c_1 を決めるために、 $\eta \rightarrow \infty$ の極限をとって、

$$\theta(\eta \rightarrow \infty) = 0 = c_1 \int_0^\infty \exp(-\eta'^2) d\eta' + 1 \quad (\text{D.88})$$

であるが、よく知られた Gauss 積分の公式より

$$\int_0^\infty \exp(-\eta'^2) d\eta' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp(-\eta'^2) d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{D.89})$$

であるから結局、

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' = \text{erfc}(\eta) \quad (\text{D.90})$$

を得る。

図 5 に誤差関数 $\text{erf}(\eta)$ 及び補誤差関数 $\text{erfc}(\eta)$ のグラフを示しておく。

D.2 球面調和関数

球面調和関数 (あるいは球面関数) $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ は Legendre 陪関数 P_ℓ^m と指数関数を用いて

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (\text{D.91})$$

により定義される (位相因子 $(-1)^m$ をつける流儀もあり)。ここで θ は補緯度、 ϕ は経度である。添字の ℓ (degree) と m (order) は整数であって、 $\ell \geq 0$ かつ $-\ell \leq m \leq \ell$ に限られる。式 (D.91) 内の Legendre 陪関数 $P_\ell^m(\cos \theta)$ は Legendre 多項式 $P_\ell(\cos \theta) = P_\ell^0(\cos \theta)$ から

$$P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d(\cos \theta)^\ell} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \quad (\text{D.92})$$

$$P_\ell^m(\cos \theta) = (-\sin \theta)^m \frac{d^m P_\ell(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}, \quad (\text{for } 0 \leq m \leq \ell) \quad (\text{D.93})$$

$$P_\ell^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (\text{D.94})$$

ℓ と m について、

- $2m$ は、 $Y_\ell^m(\theta, \phi) = 0$ を満たす ϕ の数を表す。
- $\ell - m$ は、 $Y_\ell^m(\theta, \phi) = 0$ を満たす θ の数を表す。

この定義によれば、 $\ell = 0, 1, 2, 3$ に対する $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ の具体的な関数形は次のようになる。

ℓ	$P_\ell(\cos \theta)$	P_ℓ^m	Y_ℓ^m		
0	1	$P_0^0 = 1$	$Y_0^0 = \frac{1}{4\pi}$		
1	$\cos \theta$	$P_1^{-1} = \frac{1}{2} \sin \theta$	$Y_1^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \exp(-i\phi)$		
		$P_1^0 = \cos \theta$	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$		
		$P_1^1 = -\sin \theta$	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(i\phi)$		
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	$P_2^{-2} = \frac{1}{8} \sin^2 \theta$	$Y_2^{-2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sin^2 \theta \exp(-2i\phi)$		
		$P_2^{-1} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$	$Y_2^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta \exp(-i\phi)$		
		$P_2^0 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_2^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$		
		$P_2^1 = -3 \sin \theta \cos \theta$	$Y_2^1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta \exp(i\phi)$		
		$P_2^2 = 3 \sin^2 \theta$	$Y_2^2 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sin^2 \theta \exp(2i\phi)$		
		$P_3^{-3} = \frac{\sin^3 \theta}{48}$	$Y_3^{-3} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta \exp(-3i\phi)$		
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	$P_3^{-2} = \frac{1}{8} \sin^2 \theta \cos \theta$	$Y_3^{-2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{210}{\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \exp(-2i\phi)$		
		$P_3^{-1} = \frac{1}{8} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_3^{-1} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \exp(-i\phi)$		
		$P_3^0 = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	$Y_3^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{4\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$		
		$P_3^1 = -\frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$	$Y_3^1 = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{7}{3\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \exp(i\phi)$		
		$P_3^2 = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$	$Y_3^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta \exp(2i\phi)$		
		$P_3^3 = -15 \sin^3 \theta$	$Y_3^3 = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta \exp(3i\phi)$		
		4	$\frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$	$P_4^{-4} = \frac{1}{384} \sin^4 \theta$	$Y_4^{-4} = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{35}{2\pi}} \sin^4 \theta \exp(-4i\phi)$
				$P_4^{-3} = -\frac{1}{48} \sin^3 \theta \cos \theta$	$Y_4^{-3} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta \cos \theta \exp(-3i\phi)$
				$P_4^{-2} = \frac{1}{48} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_4^{-2} = \frac{15}{8} \sqrt{\frac{1}{10\pi}} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1) \exp(-2i\phi)$
				$P_4^{-1} = -\frac{1}{8} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3)$	$Y_4^{-1} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3) \exp(-i\phi)$
$P_4^0 = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$	$Y_4^0 = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{1}{\pi}} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$				
$P_4^1 = \frac{5}{2} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3)$	$Y_4^1 = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3) \exp(i\phi)$				
$P_4^2 = \frac{15}{2} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_4^2 = \frac{15}{8} \sqrt{\frac{1}{10\pi}} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1) \exp(2i\phi)$				
$P_4^3 = 105 \sin^3 \theta \cos \theta$	$Y_4^3 = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta \cos \theta \exp(3i\phi)$				
$P_4^4 = 105 \sin^4 \theta$	$Y_4^4 = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{35}{2\pi}} \sin^4 \theta \exp(4i\phi)$				

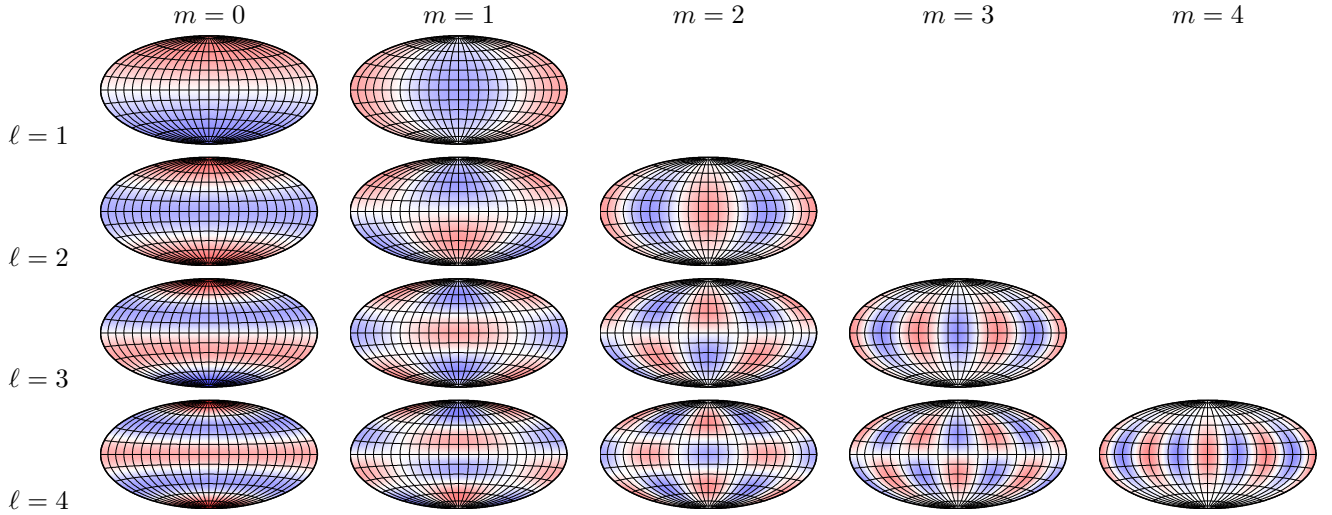


図 6: いくつかの ℓ における球面調和関数の例。

$Y_{l,-m}$ と Y_{lm} の間には、複素共役の関係

$$Y_{\ell}^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi)^* \quad (\text{D.95})$$

がある。これは (D.91) と (D.94) から明らかであろう。

球面調和関数の正規直交性

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\ell}^m(\theta, \phi)^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{D.96})$$

が得られる。これより、任意の関数 $f(r, \theta, \phi)$ を

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (\text{D.97})$$

の如く球面調和関数展開できる。ここで

$$f_{\ell m}(r) = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(r, \theta, \phi) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)^* \quad (\text{D.98})$$

である。

球面調和関数は、Laplacian を含む偏微分方程式を球座標で変数分離したときに現れる。例えば、ある関数 V が

$$V = c(r^{-(\ell+1)}, r^{\ell}) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (c=\text{constant}) \quad (\text{D.99})$$

と書けるとき、

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] V \\ &= c \left(r^{-(\ell+3)}, r^{\ell-2} \right) \left[\ell(\ell+1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell}^m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell}^m}{\partial \phi^2} \right] \\ &= c \left(r^{-(\ell+3)}, r^{\ell-2} \right) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \exp(im\phi) \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{\ell}^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_{\ell}^m(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

となる。ところで Legendre 陪関数はその定義より、以下の微分方程式 (Legendre の陪微分方程式)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) P_{\ell}^m(\cos \theta) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_{\ell}^m(\cos \theta) = 0 \quad (\text{D.101})$$

の解であるから、式 (D.100) 最後の [] は常に 0 になる。

D.2.1 水平 Laplacian への分離

Laplacian ∇^2 を r に関する微分演算子とそれ以外の演算子 L^2 に分離しておこう。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2 \quad (\text{D.102})$$

ただし、

$$L^2 \equiv -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (\text{D.103})$$

である。これより、

$$L^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{D.104})$$

がいえる。さらに式 (D.102) より、

$$D_\ell \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad (\text{D.105})$$

と定義すれば、

$$\nabla^2 f(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) = Y_\ell^m(\theta, \phi) D_\ell f(r) \quad (\text{D.106})$$

と書ける。

D.2.2 トロイダル場とポロイダル場

$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすようなベクトル場 (solenoidal) は、ポロイダル場 \boldsymbol{S}

$$\boldsymbol{S} \equiv \nabla \times \left[\nabla \times \left(\frac{\Phi}{r} \boldsymbol{r} \right) \right] = \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{\Phi}{r} \right) \times \boldsymbol{r} \right] \quad (\text{D.107})$$

とトロイダル場 \boldsymbol{T}

$$\boldsymbol{T} \equiv \nabla \times \left[\frac{\Psi}{r} \boldsymbol{r} \right] = \nabla \left(\frac{\Psi}{r} \right) \times \boldsymbol{r} \quad (\text{D.108})$$

の和で書くことができる。各々を球座標系の成分で書き下すと、

$$\boldsymbol{S} = \left(\frac{1}{r^2} L^2 \Phi, \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \phi} \right) \quad (\text{D.109})$$

$$\boldsymbol{T} = \left(0, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}, -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{D.110})$$

となる。さらに Φ や Ψ を式 (D.97) に倣って球面調和関数展開してみよう。こうして得られる展開係数 (r の関数でもある) は

$$\boldsymbol{S}_{\ell m} \equiv \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi_{\ell m}(r) Y_\ell^m, \frac{1}{r} \frac{d\Phi_{\ell m}}{dr} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d\Phi_{\ell m}}{dr} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} \right) \quad (\text{D.111})$$

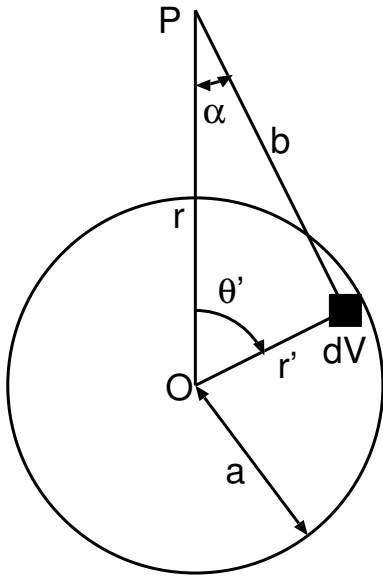
$$\boldsymbol{T}_{\ell m} \equiv \left(0, \frac{\Psi_{\ell m}(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi}, -\frac{\Psi_{\ell m}(r)}{r} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \right) \quad (\text{D.112})$$

となる。

E 重力・ジオイド

本章の記述は主に [14, 10, 3] を参考にした。また以下では慣習に従い、 ϕ で緯度を表すものとする。そのため、極座標系は (r, λ, ψ) という変数で表すこととする。

E.1 球対称な密度分布をもつ物体による万有引力



図のように、半径が a の球体を取り、球の内部の微小体積素片 dV が点 P に及ぼす万有引力を考える。その加速度を dg_m と書くと、

$$dg_m = \frac{G\rho(r')dV}{b^2}$$

である。これを積分することで、この球全体が P に及ぼす万有引力 g_m を求めることができる。系の対称性より、 P から球の中心 O に向かう成分のみを考えれば十分であるから、

$$g_m = \int dg_m \cos \alpha = G \int \frac{\rho(r') \cos \alpha}{b^2} dV \quad (\text{E.113})$$

$$= G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r') r'^2 \sin \lambda' \cos \alpha}{b^2} d\psi' d\lambda' dr' \quad (\text{E.114})$$

と表される。

この積分を実行するために、 λ' と α を消去することを考える。余弦定理より

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb} \quad (\text{E.115})$$

が成り立つ。同様に

$$b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \lambda' \quad (\text{E.116})$$

もいえる。式 (E.116) の両辺を λ' で微分することにより、

$$\sin \lambda' d\lambda' = \frac{b}{rr'} db \quad (\text{E.117})$$

が成り立つことも確認できる。ただしこの際、 r と r' は一定としてある。また $0 \leq \lambda' \leq \pi$ であることから、 $|r - r'| \leq b \leq r + r'$ である。点 P が球の内側にあるか外側にあるかによって、積分範囲が変わることに注意。

式 (E.115) と (E.117) を式 (E.114) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} g_m &= G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{|r-r'|}^{r+r'} \frac{\rho(r') r'^2}{b^2} \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb} \frac{b}{rr'} db d\psi' dr' \\ &= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a \int_{|r-r'|}^{r+r'} \rho(r') r' \left(\frac{r^2 - r'^2}{b^2} + 1 \right) db dr' \\ &= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a \rho(r') r' \left[-\frac{r^2 - r'^2}{b} + b \right]_{|r-r'|}^{r+r'} dr' \end{aligned} \quad (\text{E.118})$$

を得る。以下、 r と a の大小関係によって場合分けを行う。

- $r \geq a$ (点 P が球の表面または外側にある) 場合には、式 (E.118) 中の $r - r'$ は常に非負である。よって、

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a \rho(r') r' \left[-\frac{r^2 - r'^2}{b} + b \right]_{r-r'}^{r+r'} dr' \\ &= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a \rho(r') r' (4r') dr' = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' \end{aligned} \quad (\text{E.119})$$

となる。ここで、球の全質量 M が

$$M = 4\pi \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' \quad (\text{E.120})$$

であることを用いると結局、

$$g_m = \frac{GM}{r^2} \quad (\text{E.121})$$

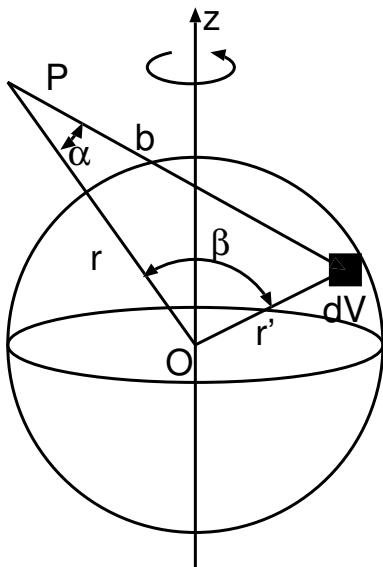
を得る。即ち、球対称な密度分布をもつ物体の外側における万有引力による加速度は、球の中心に全質量が集中していると考えた場合に得られるものと同じである。

- $r < a$ (点 P が球の内側にある) 場合には、 $r - r'$ の符号によって場合分けが必要である。

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r' \left[-\frac{r^2 - r'^2}{b} + b \right]_{r-r'}^{r+r'} dr' + \frac{\pi G}{r^2} \int_r^a \rho(r') r' \left[-\frac{r^2 - r'^2}{b} + b \right]_{r'-r}^{r'+r} dr' \\ &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \end{aligned} \quad (\text{E.122})$$

右辺第 2 項の b に関する積分は 0 になることに注意。即ち、 $r' > r$ にある体積素片からの寄与はなくなり、 $0 \leq r' \leq r$ の範囲にある体積素片からの寄与のみが残ることになる。

E.2 扁平な物体による万有引力



地球のように、自転の効果を受けて扁平になった物体が、物体の外側につくる万有引力を考える。この場合も (自転軸に関する対称性を後に仮定するため?)、物体の重心 O に向かう万有引力の成分のみを考えればよい。

$$g_m = G \int \frac{\rho \cos \alpha}{b^2} dV = \frac{G}{2r^2} \int \frac{r}{b} \left[1 + \frac{r^2}{b^2} \left(1 - \frac{r'^2}{r^2} \right) \right] \rho dV \quad (\text{E.123})$$

この積分を実行するために、 b を消去することを考える。余弦定理より、

$$b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \beta \quad (\text{E.124})$$

であるから、

$$\frac{r}{b} = \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right]^{-1/2} \quad (\text{E.125})$$

を得る。これを式 (E.123) に代入すると、

$$g_m = \frac{G}{2r^2} \int \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right]^{-1/2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{r'^2}{r^2} \right) \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right]^{-1} \right\} \rho dV \quad (\text{E.126})$$

となる。

この式を厳密に解析的に積分するのは不可能なので、近似的な方法を考える。具体的には、式 (E.126) を (r'/r) のべきに展開し、2次の項までのみを残すことにする。即ち、

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right]^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right)^2 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3 \cos^2 \beta - 1) + \dots \\ \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right]^{-1} &\approx 1 - \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right) + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \beta \right)^2 + \dots \\ &\approx 1 + 2 \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{r'^2}{r^2} (4 \cos^2 \beta - 1) + \dots \end{aligned}$$

と近似する。ただし $\varepsilon < 1$ に関する以下のべき級数展開の表式を繰り返し用いた。

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8} + \dots \quad (\text{E.127})$$

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots \quad (\text{E.128})$$

これより、

$$\begin{aligned} g_m &\approx \frac{G}{2r^2} \int \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3 \cos^2 \beta - 1) + \dots \right] \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(1 - \frac{r'^2}{r^2} \right) \left[1 + 2 \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{r'^2}{r^2} (4 \cos^2 \beta - 1) + \dots \right] \right\} \rho dV \\ &\approx \frac{G}{r^2} \int \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3 \cos^2 \beta - 1) + \dots \right] \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos \beta + \frac{r'^2}{r^2} (2 \cos^2 \beta - 1) + \dots \right\} \rho dV \\ &\approx \frac{G}{r^2} \int \left\{ 1 + 2 \frac{r'}{r} \cos \beta + 3 \frac{r'^2}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right\} \rho dV \quad (\text{E.129}) \end{aligned}$$

を得る。さらに変形すると

$$g_m = \frac{G}{r^2} \int \rho dV + 2 \frac{G}{r^3} \int r' \cos \beta \rho dV + 3 \frac{G}{r^4} \int r'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \rho dV$$

となるが、右辺第1項の積分のうち $\int \rho dV = M$ であり、また第2項の積分のうち $\int r' \cos \beta \rho dV$ は座標原点を重心にとってあることから0となる。それゆえ結局、

$$g_m = \frac{GM}{r^2} + 3 \frac{G}{r^4} \int r'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \rho dV \quad (\text{E.130})$$

を得る。

ところで式 (E.130) の右辺第 2 項の積分は

$$\int r'^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta\right) \rho dV = -\frac{1}{2} \int r'^2 \rho dV + \frac{3}{2} \int r'^2 \cos^2 \beta \rho dV$$

のように書き直せる。これを、軸対称な物体の慣性モーメントで表すことを考えよう。自転軸 (z 軸) まわりの慣性モーメントを C と書くと、

$$C \equiv \int (x'^2 + y'^2) \rho dV = \int r'^2 \sin^2 \lambda' \rho dV \quad (\text{E.131})$$

となる。同様に x 軸まわり及び y 軸まわりの慣性モーメントをそれぞれ A 及び B と書くと、

$$A \equiv \int (y'^2 + z'^2) \rho dV = \int r'^2 (\sin^2 \lambda' \sin^2 \psi' + \cos^2 \lambda') \rho dV \quad (\text{E.132})$$

$$B \equiv \int (x'^2 + z'^2) \rho dV = \int r'^2 (\sin^2 \lambda' \cos^2 \psi' + \cos^2 \lambda') \rho dV \quad (\text{E.133})$$

であるが、 z 軸まわりの対称性を仮定して $A = B$ とみなす。また式 (E.131)、(E.132)、(E.133) の辺々を加えると、

$$A + B + C = 2 \int (x'^2 + y'^2 + z'^2) \rho dV = 2 \int r'^2 \rho dV$$

となるから

$$\int r'^2 \rho dV = \frac{A + B + C}{2} = A + \frac{C}{2} \quad (\text{E.134})$$

と書ける。さらに点 P の緯度 (直線 OP が xy 平面となす角) を ϕ とし、その位置を

$$(x, y, z) = (r \cos \phi \cos \psi, r \cos \phi \sin \psi, r \sin \phi)$$

と書くことにすると、ベクトルの内積より

$$\begin{aligned} r' \cos \beta &= (x', y', z') \cdot (\cos \phi \cos \psi, \cos \phi \sin \psi, \sin \phi) \\ &= x' \cos \phi \cos \psi + y' \cos \phi \sin \psi + z' \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{E.135})$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \int r'^2 \cos^2 \beta \rho dV &= \cos^2 \phi \cos^2 \psi \int x'^2 \rho dV + \cos^2 \phi \sin^2 \psi \int y'^2 \rho dV + \sin^2 \phi \int z'^2 \rho dV \\ &\quad + 2 \cos^2 \phi \sin \psi \cos \psi \int x' y' \rho dV + 2 \sin \phi \cos \phi \sin \psi \int y' z' \rho dV + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \psi \int x' z' \rho dV \end{aligned} \quad (\text{E.136})$$

となるが、軸対称性の仮定より、

$$\int x'^2 \rho dV = \int y'^2 \rho dV \quad (\text{E.137})$$

$$= \frac{1}{2} \int (x'^2 + y'^2) \rho dV = \frac{C}{2} \quad (\text{E.138})$$

であり、かつ

$$\begin{aligned} \int z'^2 \rho dV &= \int [r'^2 - (x'^2 + y'^2)] \rho dV \\ &= \left(A + \frac{C}{2}\right) - C = A - \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (\text{E.139})$$

となる。さらに $\int x'y'\rho dV$ 、 $\int y'z'\rho dV$ 、 $\int x'z'\rho dV$ の項 (慣性プロダクトとも呼ばれる) は、座標軸を慣性主軸にとってあれば 0 になる。よって、

$$\int r'^2 \cos^2 \beta \rho dV = \frac{C}{2} \cos^2 \phi + \left(A - \frac{C}{2} \right) \sin^2 \phi \quad (\text{E.140})$$

これらを式 (E.130) に代入すると、

$$g_m = \frac{GM}{r^2} - \frac{3G}{2r^4} (C - A) (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (\text{E.141})$$

と書ける。あるいは、赤道半径を a として以下で定義される J_2

$$C - A \equiv J_2 M a^2 \quad (\text{E.142})$$

を用いると、

$$g_m = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2}{2r^4} J_2 (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (\text{E.143})$$

とも表される。

E.3 自転による遠心力

地球の自転の角速度の大きさを ω とすると、緯度 ϕ の点 P にはたらく遠心力の大きさ g_ω は

$$g_\omega = \omega^2 r \cos \phi \quad (\text{E.144})$$

である。この力は自転軸と垂直な外向きにはたらいっていることに注意しよう。地球の中心に向かう遠心力の成分は

$$-g_\omega \cos \phi = -\omega^2 r \cos^2 \phi \quad (\text{E.145})$$

となる。

E.4 重力

重力とは、万有引力による引力と、自転による遠心力との合力であるから、その加速度 g は

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2}{2r^4} J_2 (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi \quad (\text{E.146})$$

と書き表わされる。

E.5 引力のポテンシャル

式 (E.143) より、万有引力のポテンシャル V を

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^3} J_2 (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (\text{E.147})$$

のように表すことができる。ただし無限遠 ($r \rightarrow \infty$) では $V = 0$ とした。

なおこの式は、引力のポテンシャルの r^{-3} 以上の高次項を省略した表現になっている。高次項を考慮した場合の引力ポテンシャル V_1 は一般に

$$V_1 = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin n\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \right] \quad (\text{E.148})$$

と表される。ここで P_{n0} はルジャンドル関数、 P_{nm} は (完全正規化された) ルジャンドル陪関数である。また C_{nm} や S_{nm} はストークス係数とも呼ばれ、

$$C_{20} = -J_2, \quad C_{21} = S_{21} = 0 \quad (\text{E.149})$$

である。

E.6 重力ポテンシャル・ジオイド

同様に、遠心力をも含めた重力のポテンシャル U を

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^3} J_2 (3 \sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi \quad (\text{E.150})$$

のようにとることができる。遠心力をも含めた重力の等ポテンシャル面のうち、平均海面と一致するものをジオイドと呼ぶ。

以下では式 (E.150) から期待されるジオイド面の表式を求めてみる。まず赤道 ($r = a$ かつ $\phi = 0$) での重力ポテンシャルの値を U_0 と書くと

$$U_0 = -\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 \right) - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \quad (\text{E.151})$$

一方、極 ($r = c$ かつ $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$) でも $U = U_0$ となるはずであるから、

$$U_0 = -\frac{GM}{c} \left[1 - \left(\frac{a}{c} \right)^2 J_2 \right] \quad (\text{E.152})$$

である。両者を等値して

$$1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} = \frac{a}{c} \left[1 - \left(\frac{a}{c} \right)^2 J_2 \right] \quad (\text{E.153})$$

である。ここで、以下で定義される偏平率 f

$$f \equiv \frac{a-c}{a} \quad (\text{E.154})$$

を求めてみよう。 f と J_2 の 2 次以上の項を無視すれば、式 (E.153) の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-f} \left[1 - \left(\frac{1}{1-f} \right)^2 J_2 \right] &\approx (1+f) [1 - (1+2f)J_2] \approx (1+f)(1-J_2) \\ &\approx 1+f-J_2 \end{aligned}$$

と書けるので、結局

$$f \approx \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \quad (\text{E.155})$$

を得る。

なお一般的には、基準となるジオイドは回転楕円体とみなして考える。地球中心からその基準面までの距離を r_0 と書くと、

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{c^2} = 1 \quad (\text{E.156})$$

となる。ここで a は赤道半径、 c は極半径である。偏平率 f を用いてこれを書き直すと、

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{a^2(1-f)^2} = 1 \quad (\text{E.157})$$

あるいは

$$r_0 = a \left[1 + \frac{2f-f^2}{(1-f)^2} \sin^2 \phi \right]^{-1/2} \quad (\text{E.158})$$

F 結晶の対称性と異方性

この章の記述は [12] を参考にした。

固体地球をつくる 1 つの単位は鉱物の結晶である。結晶はいくつかの結晶系に分類できる。マンツルの鉱物としては、オリピンは斜方晶系、リングウッドイト・ガーネット・マグネシオウスタイトは立方晶系に属する。ペロブスカイトはいろいろな結晶系に属しうが、下部マンツルでは斜方晶系の構造が最も安定と考えられている。

それぞれの結晶系の中にも、原子の配置によっていろいろな結晶構造がありうる。例えば、立方晶系には体心立方晶、面心立方晶や単純立方晶がある。常温・常圧では鉄は体心立方晶をとるが、常圧・高温では面心立方晶となる。また高圧では六方晶が安定となる。

F.1 ミラー指数

結晶は単位格子が集まったものであるが、原子で作られる面の集まりとみることもできる。このような1組の面の集合を結晶格子面という。結晶ではこんな結晶格子面が多数存在する。これを表したいときに使うのがミラー指数 (Miller index) である。ミラー指数は (hkl) の如く「丸括弧の中の3つの整数」で格子面を表わす。ある結晶の結晶軸として a 軸、 b 軸、 c 軸をとり、それぞれを \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} の如きベクトルで表すことにしよう。当然ながら任意の平面は、3つの整数 k, l, m の組み合わせにより

$$\vec{p} = \frac{1}{k}\vec{a} + \frac{1}{l}\vec{b} + \frac{1}{m}\vec{c}$$

のように表すことができる。このように表される面を (hkl) 面という。同様に結晶の方位を表したい場合にも、3つの整数 K, L, M の組み合わせにより

$$\vec{r} = K\vec{a} + L\vec{b} + M\vec{c}$$

のように表される。この方向を $[KLM]$ 方向という。

F.2 極点図

特定の結晶面の分子や結晶の向きがそろっていること (配向) を調べようとするとき、球の中心に試料を置き、その結晶面の法線ベクトルが球面を貫く位置に点を打ち、その分布を球面上の等高線で表わしたものの。配向状態を記述するには極点図を用いる。

参考文献

- [1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The Clarendon Press, 1961. 652 pp.
- [2] U. R. Christensen and D. A. Yuen. Layered convection induced by phase transitions. *J. Geophys. Res.*, 90(B12):10291–10300, 1985.
- [3] C. M. R. Fowler. *The solid Earth: an introduction to global geophysics*. Cambridge University Press, 1992.
- [4] S. Honda, D. A. Yuen, S. Balachandar, and D. M. Reuteler. Three-dimensional instabilities of mantle convection with multiple phase transitions. *Science*, 259:1308–1311, 1993.
- [5] M. Ogawa and H. Nakamura. Thermochemical regime of the early mantle inferred from numerical models of the coupled magmatism-mantle convection system with solid-solid phase transitions at depths around 660 km. *J. Geophys. Res.*, 103(B6):12161–12180, 1998.
- [6] G. Schubert, D. L. Turcotte, and P. Olson. *Mantle convection in the Earth and Planets*. Cambridge Univ. Press, 2001. 940 pp.
- [7] V. Steinbach and D. A. Yuen. Effects of depth-dependent properties on the thermal anomalies produced in flush instabilities from phase transitions. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 86(1-3):165–183, 1994.
- [8] K. C. Stengel, D. S. Oliver, and J. R. Booker. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J. Fluid Mech.*, 120:411–431, 1982.
- [9] P. J. Tackley. Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles. *J. Geophys. Res.*, 101(B2):3311–3332, 1996.

- [10] D. L. Turcotte and G. Schubert. *Geodynamics*. Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 2002. 456 pp.
- [11] 大野 一郎. 地球と惑星を構成する鉱物の物性, chapter 2. Number 5 in 岩波講座 地球惑星科学. 岩波書店, 1996.
- [12] 唐戸 俊一郎. レオロジーと地球科学. 東京大学出版会, 2000.
- [13] 久田 俊明. 非線型有限要素法のためのテンソル解析の基礎. 丸善, 1992.
- [14] 力武 常次. 固体地球科学入門-地球とその物理-. 共立出版, 1994.
- [15] 赤荻 正樹. 地球構成鉱物の高圧相転移と熱力学, chapter 4. Number 5 in 岩波講座 地球惑星科学. 岩波書店, 1996.