

学生証番号 _____

氏名 _____

地球のマントルの中の対流が熱対流であると仮定して、以下の問に答えよ。

1. 対流による熱輸送の効率は以下で定義されるヌッセルト数 Nu によってはかられる。

$$Nu = \frac{\text{対流による熱流量}}{\text{伝導による熱流量}} \quad (10.38)$$

マントル対流が運んでいる熱量が、現在の地表面での熱流量 87 mW/m^2 に等しいと仮定すると、そのヌッセルト数 Nu はいくらになると見積られるか。マントルの厚さを $b = 2.9 \times 10^6 \text{ m}$ 、熱伝導率を $k = 4 \text{ W/m K}$ 、マントル内の温度差 $\Delta T = 10^3 \text{ K}$ として計算せよ。

[答]

マントル内を伝導によって伝わる熱流量は

$$4 \text{ [W/m K]} \times \frac{10^3 \text{ [K]}}{2.9 \times 10^6 \text{ [m]}} = \frac{1}{725} \text{ [W/m}^2\text{]} \simeq 1.3793 \text{ [mW/m}^2\text{]}$$

よってヌッセルト数は

$$Nu = \frac{0.087 \text{ [W/m}^2\text{]}}{1/725 \text{ [W/m}^2\text{]}} = 63.075$$

2. 対流による流れの速さ U とレイリー数 Ra の間には

$$U = 0.078 \times \frac{\kappa}{b} \times Ra^{2/3}$$

という関係があるとする。ただし κ は流体の熱拡散率、 b は流体の厚さである。マントル対流の速度が (プレート運動の速度とほぼ同じの) 10 cm/年 と仮定して、上の関係式からマントル対流のレイリー数の大きさを見積ってみよ。ただしマントルの熱拡散率を $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ かつ $b = 2.9 \times 10^6 \text{ m}$ として計算せよ。

[答]

与えられた関係式を書き直すと、レイリー数 Ra は以下の式により計算できる。

$$Ra = \left(\frac{1}{0.078} U \frac{b}{\kappa} \right)^{3/2}$$

単位に注意して、この式に与えられた数値を代入すると

$$\begin{aligned} Ra &= \left(\frac{1}{0.078} \times \frac{0.1 \text{ [m/年]}}{3.1536 \times 10^7 \text{ [秒/年]}} \times \frac{2.9 \times 10^6 \text{ [m]}}{10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s}]} \right)^{3/2} \\ &\simeq (1.18 \times 10^5)^{3/2} \simeq 4.0 \times 10^7 \end{aligned}$$

を得る。ここで得られたレイリー数 Ra の値は、マントル物質の物性値から見積られる Ra の値とほぼ一致している。