

学生証番号 _____

氏名 _____

等方弾性体という簡単な場合では、応力 σ とひずみ e の成分の間には、Lamé 定数 (λ と 剛性率 μ) を使って

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz} & \text{および} & \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda + 2\mu)e_{zz} & \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = 2\mu e_{xz} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

といった関係がある (Hooke の法則に対応)。このうち、法線成分 (2つの添字が同じもの) の間の関係を逆に解いて

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ e_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ e_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

と表わしたとき、2つの定数 E と ν は λ と μ を使ってどのように書き表わされるか。なお E はヤング率 (Young's modulus)、 ν はポアソン比 (Poisson's ratio) と呼ばれる量である。

[答]

(A) 式の法線成分の表式を (B) 式に代入して整理すると、例えば e_{xx} について、

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [(\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz}] \\ &\quad - \frac{\nu}{E} [\lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz}] - \frac{\nu}{E} [\lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda + 2\mu)e_{zz}] \\ &= \frac{1}{E} [\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu] e_{xx} + \frac{1}{E} [\lambda - 2(\lambda + \mu)\nu] (e_{yy} + e_{zz}) \end{aligned}$$

という式を得る。(e_{yy} や e_{zz} についても同様の関係式が得られる。) この式の左辺と右辺が等しくなるためには

$$\frac{1}{E} [\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu] = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{E} [\lambda - 2(\lambda + \mu)\nu] = 0$$

でなければならない。これらを解くと、以下の関係式が得られる。

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{かつ} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

ある1つの方向 (例えば x 方向) に引っ張りの応力 σ_{xx} を加えた場合を例にとると、ヤング率 E とは引張と同じ方向に生じた伸びひずみ e_{xx} に関する弾性定数であり、ポアソン比 ν とは引張の方向と直交する方向に生じた伸びひずみ (正確には「縮み」) の大きさと e_{xx} の比を表わす。

[別解その 1]

(A) 式と (B) 式の法線成分の表式を辺々加えると

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} &= (3\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\ e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} &= \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\end{aligned}$$

これより $3\lambda + 2\mu = E/(1 - 2\nu)$ がいえる。いっぽう、(A) 式と (B) 式の法線成分の第 1 式と第 2 式で辺々引くと

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= 2\mu(e_{xx} - e_{yy}) \\ e_{xx} - e_{yy} &= \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\end{aligned}$$

これより $2\mu = E/(1 + \nu)$ がいえる。これらを書き直すと以下を得る。

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{かつ} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

.....
[別解その 2]

等方弾性体という仮定により、 $\sigma_{xx} \neq 0$ かつ $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ としても一般性を失わない。

これを (A) 式の法線成分の表式に代入すると、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} \\ 0 &= \lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz} \\ 0 &= \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda + 2\mu)e_{zz}\end{aligned}$$

これを e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{zz} についての連立一次方程式とみて解くと、 σ_{xx} と λ および μ を用いて e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{zz} を以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx} \\ e_{yy} = e_{zz} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx}\end{aligned} \tag{1}$$

いっぽう、 $\sigma_{xx} \neq 0$ かつ $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ を (B) 式に代入すると

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} \\ e_{yy} = e_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}\end{aligned} \tag{2}$$

となる。式 (1) と (2) を比較すると、

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad \text{かつ} \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

という関係が成り立つはずである。これらを書き直すと答を得る。