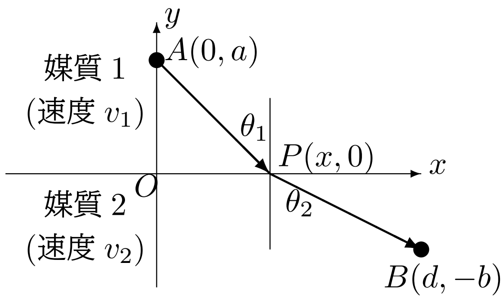
固体地球物理学概論 2025 年度第 08 回 宿題　　　　(提出: 次回の講義開始時)

学生証番号 ____________________　　　　氏名 ________________________

「光は光学的距離 (すなわち進むのにかかる時間) が最小となる経路を通る」という原理を「フェルマー (Fermat) の原理」という。波の屈折に関するスネルの法則も、この原理より導くことができる。下図 (教科書の図 2.43 に対応) の点 A から点 B へと波が進む時間が最短になるような経路上にある点 P の位置を求めることにより、スネルの法則を導け。
ただし必要ならば、微分に関する以下の公式を用いてよい。(m、n、k は定数)

$$\frac{d}{dx}\left[(x-m)^2+k^2\right]^n = \frac{d}{dx}\left[(m-x)^2+k^2\right]^n = 2n(x-m)\left[(m-x)^2+k^2\right]^{n-1}$$



[答]　波が経路全体を通るのにかかる時間を $T(x)$ と書くと

$$T(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}}_{A\text{ から }P\text{ まで}} + \underbrace{\frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}}_{P\text{ から }B\text{ まで}} = \frac{1}{v_1}\left(x^2+a^2\right)^{1/2} + \frac{1}{v_2}\left[(d-x)^2+b^2\right]^{1/2}$$

上の公式を利用して、$T(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} &= \frac{1}{v_1}2\frac{1}{2}x\left(x^2+a^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{v_2}2\frac{1}{2}(x-d)\left[(d-x)^2+b^2\right]^{-1/2}\\ &= \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}\end{aligned}$$

$T(x)$ が最小となるには、$\dfrac{dT}{dx}=0$ であればよいので、その条件は

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

と与えられる。ところで角度 θ_1 や θ_2 に関する三角比の関係より

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\overline{AP}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{d-x}{\overline{PB}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

がいえるので結局

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

となり、スネルの法則が導かれる。