固体地球物理学概論 2025 年度第 06 回 宿題

(提出: 次回の講義開始時)

学生証番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

等方弾性体という簡単な場合では、応力 σ とひずみ e の成分の間には、Lamé 定数 (λ と 剛性率 μ) を使って

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (\lambda+2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} \\
\sigma_{yy} &= \lambda e_{xx} + (\lambda+2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz} \\
\sigma_{zz} &= \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda+2\mu)e_{zz}
\end{aligned}
\quad \text{および} \quad
\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy} \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz} \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = 2\mu e_{xz}
\end{aligned}
\tag{A}
$$

といった関係がある (Hooke の法則に対応)。このうち、法線成分 (2 つの添字が同じもの) の間の関係を逆に解いて

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\
e_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\
e_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz}
\end{aligned}
\tag{B}
$$

と表わしたとき、2 つの定数 E と ν は λ と μ を使ってどのように書き表わされるか。なお E はヤング率 (Young's modulus)、ν はポアソン比 (Poisson's ratio) と呼ばれる量である。

[答]

(A) 式の法線成分の表式を (B) 式に代入して整理すると、例えば e_{xx} について、

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}\left[(\lambda+2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz}\right] \\
&\quad - \frac{\nu}{E}\left[\lambda e_{xx} + (\lambda+2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda+2\mu)e_{zz}\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[\lambda(1-2\nu)+2\mu\right]e_{xx} + \frac{1}{E}\left[\lambda - 2(\lambda+\mu)\nu\right](e_{yy}+e_{zz})
\end{aligned}
$$

という式を得る。(e_{yy} や e_{zz} についても同様の関係式が得られる。) この式の左辺と右辺が等しくなるためには

$$
\frac{1}{E}\left[\lambda(1-2\nu)+2\mu\right] = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{E}\left[\lambda - 2(\lambda+\mu)\nu\right] = 0
$$

でなければならない。これらを解くと、以下の関係式が得られる。

$$
E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{かつ} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}
$$

ある 1 つの方向 (例えば x 方向) に引っ張りの応力 σ_{xx} を加えた場合を例にとると、ヤング率 E とは引張と同じ方向に生じた伸びひずみ e_{xx} に関する弾性定数であり、ポワソン比 ν とは引張の方向と直交する方向に生じた伸びひずみ (正確には「縮み」) の大きさと e_{xx} の比を表わす。

[別解その 1]

(A) 式と (B) 式の法線成分の表式を辺々加えると

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=(3\lambda+2\mu)\,(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})$$
$$e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\frac{1-2\nu}{E}\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$$

これより $3\lambda+2\mu=E/(1-2\nu)$ がいえる。いっぽう、(A) 式と (B) 式の法線成分の第 1 式と第 2 式で辺々引くと

$$\sigma_{xx}-\sigma_{yy}=2\mu\,(e_{xx}-e_{yy})$$
$$e_{xx}-e_{yy}=\frac{1+\nu}{E}\,(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})$$

これより $2\mu=E/(1+\nu)$ がいえる。これらを書き直すと以下を得る。

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\quad \text{かつ} \quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

………………………………………………………………………………………

[別解その 2]

等方弾性体という仮定により、$\sigma_{xx}\neq 0$ かつ $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$ としても一般性を失わない。

これを (A) 式の法線成分の表式に代入すると、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}&=(\lambda+2\mu)e_{xx}+\lambda e_{yy}+\lambda e_{zz}\\0&=\lambda e_{xx}+(\lambda+2\mu)e_{yy}+\lambda e_{zz}\\0&=\lambda e_{xx}+\lambda e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{zz}\end{aligned}$$

これを e_{xx}、e_{yy}、e_{zz} についての連立一次方程式とみて解くと、σ_{xx} と λ および μ を用いて e_{xx}、e_{yy}、e_{zz} を以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}e_{xx}&=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}\\e_{yy}=e_{zz}&=-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}\end{aligned}\tag{1}$$

いっぽう、$\sigma_{xx}\neq 0$ かつ $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$ を (B) 式に代入すると

$$\begin{aligned}e_{xx}&=\frac{1}{E}\sigma_{xx}\\e_{yy}=e_{zz}&=-\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}\end{aligned}\tag{2}$$

となる。式 (1) と (2) を比較すると、

$$\frac{1}{E}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\quad \text{かつ} \quad \frac{\nu}{E}=\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

という関係が成り立つはずである。これらを書き直すと答を得る。