固体地球物理学概論 2024 年度第 11 回 宿題

(提出: 次回の講義開始時)

学生証番号 ________________　　　　氏名 ____________________

地球の内部はほぼ球対称な構造をしており、密度の分布は深さ (あるいは地球の中心からの距離) によってほぼ決まっている。これについて、以下の問に答えよ。

1. 物体の「回転のしにくさ」の程度を表わすために、力学では「慣性モーメント」とよばれる指標が用いられる。半径 a の球の内部の密度 ρ の分布が、中心からの距離 r のみで決まる場合、その球の慣性モーメント I は

$$I = \frac{8}{3}\pi \int_0^a r^4 \rho(r) dr$$

で与えられる。これを利用して、内部の密度 ρ が $\rho_{\rm ave}$ で一定である球の慣性モーメント I を、球の質量 M と半径 a を用いて表わせ。

[答]

$\rho(r) = \rho_{\rm ave}$ で一定と仮定すると、

$$I = \frac{8}{3}\pi \int_0^a r^4 \rho(r) dr = \frac{8}{3}\pi\rho_{\rm ave} \int_0^a r^4 dr = \frac{8}{3}\pi\rho_{\rm ave} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{8}{3}\pi\rho_{\rm ave}\frac{a^5}{5}$$

ここで $M = \rho_{\rm ave}\dfrac{4}{3}\pi a^3$ であったから、

$$I = \frac{2}{5}Ma^2$$

を得る。

2. 地球の慣性モーメントは、地球と同じ質量と半径を持ち、密度が一定の球の慣性モーメントと比べて大きいか小さいか、理由とともに答えよ。

[答]

地球の慣性モーメントは、同じ質量 M と半径 a をもつ密度一定の球の慣性モーメントの値 $0.4Ma^2$ と比べて有意に小さい。これは、密度の高い物質 (金属) が地球の中心に近い部分に集中していることを示す。

この例のように、天体の慣性モーメント I を Ma^2 で割った数値が、その天体の内部で質量が中心部に集中している程度を表わす指標になる。すなわち、天体の慣性モーメントを測定することは、その天体の内部が (高密度な物質の層と低密度な物質の層に) 分化しているかどうかを知る手掛かりとなる。

表: 太陽系内のいくつかの岩石天体の測定例

天体	地球	火星	月	エウロパ	ガニメデ	カリスト
半径 [km]	6371	3389	1737	3138	5262	4820
質量 [10^{24} kg]	5.974	0.6419	0.07349	0.0480	0.1482	0.1076
I/Ma^2	0.3307	0.3662	0.394	0.330	0.3105	0.406

[おまけ]
前のページでは実にあっさりと片付けてしまったが、天体の内部構造と慣性モーメントの関係をもう少し深く掘り下げてみる。

簡単のため、核とマントルの 2 つの層だけから構成されている天体を考える。天体の半径 a に対して核の半径を $a\gamma$ (ただし $0 < \gamma < 1$) とし、さらに簡単のため核の密度は ρ_c、マントルの密度は ρ_m でそれぞれ一定 (深さ変化なし) とする。
この構成からなる天体の平均密度を ρ_{ave} と書くと、

$$\rho_{\mathrm{ave}}\frac{4}{3}\pi a^3 = \rho_c\frac{4}{3}\pi(a\gamma)^3 + \rho_m\frac{4}{3}\pi\left[a^3 - (a\gamma)^3\right]$$

これを整理すると、次の関係式を得る。

$$\rho_{\mathrm{ave}} = \rho_c\gamma^3 + \rho_m(1-\gamma^3)$$

当然ながら $\rho_c > \rho_{\mathrm{ave}} > \rho_m$ であることがいえる。
いっぽう、この構成からなる天体の慣性モーメントを $I_{2\,層}$ と書くと

$$\begin{aligned}
I_{2\,層} &= \frac{8}{3}\pi\int_0^a r^4\rho(r)dr = \frac{8}{3}\pi\int_0^{a\gamma} r^4\rho_c dr + \frac{8}{3}\pi\int_{a\gamma}^a r^4\rho_m dr \\
&= \frac{8}{3}\pi\rho_c\left[\frac{(a\gamma)^5}{5}\right] + \frac{8}{3}\pi\rho_m\left[\frac{a^5-(a\gamma)^5}{5}\right] = \frac{8}{15}\pi a^5\left[\rho_c\gamma^5 + \rho_m(1-\gamma^5)\right]
\end{aligned}$$

$I_{2\,層}$ と $\frac{2}{5}Ma^2$ (密度が一様な球の慣性モーメント) との差をとると、

$$\begin{aligned}
I_{2\,層} - \frac{2}{5}Ma^2 &= \frac{8}{15}\pi a^5\left[\rho_c\gamma^5 + \rho_m(1-\gamma^5)\right] - \frac{8}{15}\pi a^5\rho_{\mathrm{ave}} \\
&= \frac{8}{15}\pi a^5\left\{\left[\rho_c\gamma^5 + \rho_m(1-\gamma^5)\right] - \left[\rho_c\gamma^3 + \rho_m(1-\gamma^3)\right]\right\} \\
&= \frac{8}{15}\pi a^5\gamma^3(\rho_m - \rho_c)(1-\gamma^2)
\end{aligned}$$

となるが、$0 < \gamma < 1$ かつ $\rho_c > \rho_m$ であるので、この値は負である。すなわち $I_{2\,層} < \frac{2}{5}Ma^2$ である。よって、中心部に高密度の核、その外側に低密度のマントルというような成層構造をしている天体の慣性モーメントは、その天体と同じ質量と半径を持ち、密度が一定の球の慣性モーメントよりも小さい。
たとえば地球を想定して、$\rho_m = 4.4\times10^3$ [kg/m^3]、$\rho_c = 11.0\times10^3$ [kg/m^3]、かつ $\gamma = 0.55$ とすれば $\rho_{\mathrm{ave}} = 5.5\times10^3$ [kg/m^3] であるし、これに基づいて求めた $I_{2\,層}$ は

$$\frac{I_{2\,層}}{Ma^2} = \frac{2}{5}\frac{\rho_c\gamma^5 + \rho_m(1-\gamma^5)}{\rho_{\mathrm{ave}}} \simeq 0.344$$

を満たすが、これは実測された地球の慣性モーメントから得られる値 (0.33) より少し大きい。この原因の 1 つとして、核やマントルの各層の中でも密度は一定ではなく、深さとともに (圧縮によって) 大きくなっていることが挙げられる。