

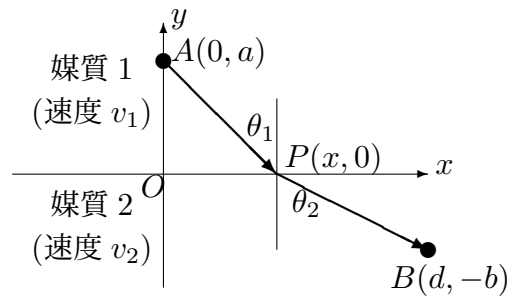
学生証番号 _____

氏名 _____

「光は光学的距離 (すなわち進むのにかかる時間) が最小となる経路を通る」という原理を「フェルマー (Fermat) の原理」という。波の屈折に関するスネルの法則も、この原理より導くことができる。下図 (教科書の図 2.43 に対応) の点 A から点 B へと波が進む時間が最短になるような経路上にある点 P の位置を求めることにより、スネルの法則を導け。

ただし必要ならば、微分に関する以下の公式を用いてよい。 (m, n, k は定数)

$$\frac{d}{dx} [(x - m)^2 + k^2]^n = \frac{d}{dx} [(m - x)^2 + k^2]^n = 2n(x - m) [(m - x)^2 + k^2]^{n-1}$$



[答] 波が経路全体を通るのにかかる時間を $T(x)$ と書くと

$$T(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}}_{A \text{ から } P \text{ まで}} + \underbrace{\frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}}_{P \text{ から } B \text{ まで}} = \frac{1}{v_1} (x^2 + a^2)^{1/2} + \frac{1}{v_2} [(d-x)^2 + b^2]^{1/2}$$

上の公式を利用して、 $T(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{v_1} 2 \frac{1}{2} x (x^2 + a^2)^{-1/2} + \frac{1}{v_2} 2 \frac{1}{2} (x - d) [(d-x)^2 + b^2]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \end{aligned}$$

$T(x)$ が最小となるには、 $\frac{dT}{dx} = 0$ であればよいので、その条件は

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

と与えられる。ところで角度 θ_1 や θ_2 に関する三角比の関係より

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{AP} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{d-x}{PB} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

がいえるので結局

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

となり、スネルの法則が導かれる。