

学生証番号 _____

氏名 _____

地球の質量による万有引力について、以下の間に答えよ。ただし簡単のため、地球は質量 $M_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg、半径 $R_a = 6.4 \times 10^6$ m の完全な球であるとし、万有引力定数 $G = 6.672 \times 10^{-11}$ m³/kg/s² とする。

1. 地球の自転による遠心力の効果が無視できる場合には、地球の重力は地球の質量による万有引力のみで決まる。このとき、地球の表面における重力加速度 g を G 、 M_e 、 R_a を用いて表わせ。

[答] 式 (7.43) で $m = 1$ kg かつ $r = R_a$ とすればよいから、

$$g = f(r = R_a) = \frac{GM_e}{R_a^2}$$

2. 地球の表面から $\Delta R = 1$ m だけ外側に離れた点において、万有引力による加速度の値は、地球表面における値と比べてどれだけ小さくなるか、その差を重力加速度の単位 (m/s²、Gal など) で求めよ。ただし必要があれば、 $|\Delta R| \ll R_a$ であるときに

$$\frac{1}{(R_a + \Delta R)^2} = \frac{1}{R_a^2} \frac{1}{[1 + (\Delta R/R_a)]^2} \simeq \frac{1}{R_a^2} \left(1 - 2\frac{\Delta R}{R_a}\right) \text{ という近似式を用いよ。}$$

[答] 地球の中心からの距離 $r = R_a + \Delta R$ の場所における万有引力による加速度を求めると、

$$f(r = R_a + \Delta R) = \frac{GM_e}{(R_a + \Delta R)^2} = \frac{GM_e}{R_a^2} \frac{1}{[1 + (\Delta R/R_a)]^2}$$

であるが、 $|\Delta R| \ll R_a$ であることを利用して上の関係式を用いれば

$$f(r = R_a + \Delta R) \simeq \frac{GM_e}{R_a^2} \left(1 - 2\frac{\Delta R}{R_a}\right)$$

と近似することができる。これより、

$$f(r = R_a) - f(r = R_a + \Delta R) = \frac{GM_e}{R_a^2} - \frac{GM_e}{R_a^2} \left(1 - 2\frac{\Delta R}{R_a}\right) = \frac{GM_e}{R_a^2} 2\frac{\Delta R}{R_a}$$

と書くことができる。これに値を代入して計算すると

$$f(r = R_a) - f(r = R_a + \Delta R) \approx 3.054 \times 10^{-6} \text{ [m/s}^2\text{]} = 0.3054 \text{ [mGal]}$$

を得る。この値は重力異常の解析で「フリーエア補正」を計算する (教科書の 7.5.4 章参照) ための「フリーエア勾配」0.3086 mGal/m の値とほぼ一致する。